T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIM KAFESLERİ ÜZERİNDE GÜÇLÜ NEGASYONLAR VE *S*-GEREKTİRME OPERATÖRLERİNİN DİREKT ÇARPIMI VE BAZI UYGULAMALARI

ECE KÜRKÇÜ

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ M. AKİF İNCE
TEZ JÜRİLERİ
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT DENİZ
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT ERTUĞRUL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2018

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIM KAFESLERİ ÜZERİNDE GÜÇLÜ NEGASYONLAR VE *S*-GEREKTİRME OPERATÖRLERİNİN DİREKT ÇARPIMI VE BAZI UYGULAMALARI

Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE danışmanlığında, Ece KÜRKÇÜ tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 11/06/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Çarpım Kafesleri Üzerinde Güçlü Negasyonlar ve *S*-gerektirme Operatörlerinin Direkt Çarpımı ve Bazı Uygulamalarını incelemek amacı ile Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak yapılmıştır.

Çalışma süresi boyunca bana yardımcı olan, değerli fikirleriyle bana rehberlik eden, ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE'ye en içten dileklerimle saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE'ye, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ'e, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans öğrenim süresinde bana katkı sağlayan Matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Her daim yanımda olan ve özellikle İngilizce konusunda bana yardımcı olan sevgili nişanlım Burak ÇAKAR'a çok teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, varlığıyla bana güç veren, bu çalışmanın tamamlanmasında ve bugünlere gelmemde büyük emeği olan değerli ailem; babam Hamit KÜRKÇÜ'ye, annem Hülya KÜRKÇÜ'ye ve kardeşim Eda KÜRKÇÜ'ye sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ece KÜRKÇÜ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Çarpım Kafesleri Üzerinde Güçlü Negasyonlar ve *S*-gerektirme Operatörlerinin Direkt Çarpımı ve Bazı Uygulamaları" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 11/06/2018

Ece KÜRKÇÜ

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

ÇARPIM KAFESLERİ ÜZERİNDE GÜÇLÜ NEGASYONLAR VE *S*-GEREKTİRME OPERATÖRLERİNİN DİREKT ÇARPIMI VE BAZI UYGULAMALARI

Ece KÜRKÇÜ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE

Bu çalışmada çarpım kafesleri üzerinde güçlü negasyonlar ve *S*-gerektirme operatörlerinin direkt çarpımı ve bazı uygulamaları üzerine çalışıldı. İlk kısımda kısmen sıralı kümeler, kafesler ve üçgensel normlar incelendi. İkinci kısımda ise negasyonlar, çarpım kafeslerinde güçlü negasyonların direkt parçalanışları, negasyonlar yardımıyla elde edilen (Uni-nullnorm, Null-uninorm) dualitesi ve son olarak güçlü negasyonlar yardımıyla tanımlanan *S*-gerektirme operatörlerinin çarpım kafesleri üzerindeki direkt parçalanışları incelendi.

2018, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Gerektirme operatörü, Üçgensel norm, Sınırlı kafes.

ABSTRACT

STRONG NEGATIONS ON PRODUCT LATTICES AND DIRECT PRODUCTS OF *S*- IMPLICATIONS OPERATORS AND SOME APPLICATIONS

Ece KÜRKÇÜ

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Akif İNCE

In this study, we worked on strong negations of product lattice and direct product of *S*-implications and some applications. In the first section, we examined some partially ordered sets, lattices and triangular norms. In the second section, we examined negations, direct partitions of strong negations on product lattices, the duality of (uni-nullnorm, null-uninorm) obtained by negations and lastly direct partitions of *S*-implications on product lattices obtained by strong negations.

2018, 41 page

Keywords: Implication operators, Triangular norms, Bounded lattice.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\wedge$	Kafeste İnfimum
$\vee$	Kafeste Supremum
$\subseteq$	Kümeler Arasındaki Alt Küme Bağıntısı
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman Değil
$\geq$	Büyük Veya Eşit
$\leq$	Küçük Veya Eşit
$\cap$	Arakesit İşlemi
$\cup$	Birleşim İşlemi
$\circ$	Bileşke
t- norm	Üçgensel Norm
t- conorm	Üçgensel Conorm
$[a, b]$	Kapalı Aralık
(a, b)	Açık Aralık
L	Kafes
P	Kısmen Sıralı Küme
B	Bool Kafesi
$L_1 \times L_2$	L_1 ve L_2 Kafeslerinin Kartezyen Çarpımı
x'	x'in Komplementi
sup X	X'in Üst Sınırlarının En Küçüğü

$\inf X$	X’in Alt Sınırlarının En Büyüğü
I	Gerektirme
n	Negasyon
$\otimes$	İç Direkt Çarpım
U	Uninorm
N	Nullnorm
UN	Uni-nullnorm
NU	Null-uninorm
$f \downarrow A$	f Fonksiyonun A Kümesine Kısıtlanışı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fuzzy küme teorisinde, t-normlar ve t-conormlar büyük ölçüde fuzzy alt kümelerin ayrı ayrı kesişim ve birleşimini ifade ettiği kabul edilir. Fuzzy mantıkta, bir tam kafes üzerine t-normlar, t-conormlar ve güçlü negasyonlar "ve", "ya da" ve "değil" olarak modellenir. Bu operatörler birçok uygulamada önemli bir rol oynamaktadır. Bilgi biliminin birçok branşında bu güçlü araçlara sıkça rastlanır. (Örneğin; fuzzy kontrolü, oyun teorisi, nöron ve sinirsel ağlar, vb.) Bahsedilen işlemlerin yapısını daha ayrıntılı anlamak bilgi biliminin tüm bu branşlarında daha iyi modellemek için çok önemlidir. Bu çalışmada çarpım kafesleri üzerinde negasyon operatörlerinin daha ayrıntılı anlaşılmasına odaklanılacaktır. Gehrke (1996), her ara(sınır) değerli negasyonun $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir β negasyonu için $\eta(x,y) = (\beta\ (\mathrm{y}), \beta(x))$ formunda olduğunu gösterdi.

Bu çalışmada, tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların iç direkt çarpımları konsepti incelenecektir. Tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların iç ve dış direkt çarpımları arasındaki ilişki üzerine çalışılacaktır. $(0,1)$ ve $(1,0)$ elemanları çarpım kafesleri üzerinde güçlü negasyonların direkt parçalanışında önemli bir rol oynamaktadır. $n(0,1) = (1,0)$ şeklinde, çarpım kafesleri üzerindeki güçlü negasyonların direkt parçalanışları için gerek ve yeter şartlardan biri gösterilecektir. (ya da buna denk olarak $n(1,0) = (0,1)$)

Bilindiği gibi t-norm ve t-conormlar birbirinin dual işlemleridir. Bir uninormun (nullnormun) dual operatörünün yine bir uninorm (nullnorm) olmasına karşın, uninormlar ve nullnormlar için t-normlar ve t-conormlar arasındaki dualiteye benzer bir konsept yoktur. Fakat bu çalışmada bir güçlü negasyon yardımıyla, uni-nullnorm ve null-uninorm denen, uninorm ve nullnormların genelleştirilmesi olan, operatörlerin birbirinin duali (n-duali) olduğu gösterilerek t-norm-t-conorm dual çifti gibi uni-nullnorm-null-uninorm dual çifti elde edilecektir.

Fuzzy mantığında, gerektirmeler genellikle, t-normlardan, t-conormlardan ve güçlü negasyonlardan türetilen ve gerektirme işlemleri (operatörleri) olarak adlandırılan uygun fonksiyonlarla gösterilir. Bu gerektirme operatörlerini (işlemlerini) tanımlamanın en yaygın yollarından birisi şu şekildedir: S-gerektirmesi olarak adlandırılan, verilen bir S t-conormu ve n güçlü negasyonu için $I_S(x, y) = S(n(x), y)$ dir. Bu çalışmada t-conormların ve güçlü negasyonların direkt ayrıştırılabilirliği kullanılarak, S-gerektirme operatörlerinin direkt ayrıştırılabilirliği üzerine çalışılacaktır.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler (Birkhoff, 1948)

Tanım 1.2.1. P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$,

P1. $x \leq x$ (Yansıma)
P2. $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)
P3. $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. $x \leq y$ bağıntısı $y \geq x$ olarak da yazılır ve 'y, x de içerilir' olarak ifade edilir. Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ olarak da yazılır.

Uyarı 1.2.1. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun.

Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$, $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böylece bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P'nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$, $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa 1 ile gösterilir ve P' nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu açıktır.

Eğer 0 ve 1 elemanları mevcutsa, her $x \in P$, $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1'e evrensel sınırlar denir.

Tanım 1.2.2. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $x, y \in P$, $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine tam sıralı küme veya zincir denir.

Tanım 1.2.3. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne sıra korur dönüşüm veya izoton denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$, $x \leq_1 y$ ise $\theta(x) \leq_2 \theta(y)$ dir.

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$,

$\theta(x) \leq_2 \theta(y) \;\Leftrightarrow\; x \leq_1 y$ sağlayacak şekilde birebir ve örten bir $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümü mevcuttur. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorf ise bu durum $P \cong Q$ ile gösterilir.

$(P, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfiye bir otomorfi denir.

Tanım 1.2.4. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. Bir $\theta: P \longrightarrow Q$ fonksiyonuna ters sıra korur veya antiton denir:$\Leftrightarrow$ $x, y \in P$ için,

$[x \leq_1 y$ ise $\theta(y) \leq_2 \theta(x)]$ ve $[\theta(x) \leq_2 \theta(y)$ ise $y \leq_1 x]$

gerektirmeleri sağlanır. θ antiton, 1-1 ve örten bir dönüşüm ise θ dönüşümüne dual izomorfi denir.

Tanım 1.2.5. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme, $X \subseteq P$ ve $a \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$, $a \leq x$ ise bu a elemanına X kümesnin en küçük elemanıdır denir ve Eke$X$ ile gösterilir. X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve Ebe$X$ ile gösterilir.

$a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir. X kümesinde maksimal eleman dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Tanım 1.2.6. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun.

i. $a \in P$ ve her $x \in X$, $x \leq a$ ise a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir. X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. X in herhangi bir c üst sınırı için $a \leq c$ ise, a elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $a = supX$ veya $a = \vee X$ ile gösterilir.

ii. $b \in P$ ve her $x \in X$, $b \leq x$ ise b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir. X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. X in herhangi bir d alt sınırı için $d \leq b$ ise, b elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $b = infX$ veya $b = \wedge X$ ile gösterilir.

1.3. Kafesler (Birkhoff, 1948)

Tanım 1.3.1. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $x, y \in P$, $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcut ise P ye kafes denir.

P kafesinde $x, y \in P$ için $x \vee y := sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Eğer $(P, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri P üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(P, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Tanım 1.3.2. Bir L kafesine tam kafes denir:$\Leftrightarrow$ L nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir, yani her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$, L de mevcuttur.

Özel olarak Tanım 1.3.2 de $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

Tanım 1.3.3. L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$, $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $[a, b] \coloneqq \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Tanım 1.3.4. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin $P \times Q = \{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$ şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi her $x_1, x_2 \in P$ ve $y_1, y_2 \in Q$,

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.3.1. L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.3.1. P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) her $x, y, z \in P$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$ (İdempotent)

L2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$ (Komütatif)

L3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)

L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$ (Yok etme)

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.3.2. P, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$,

$0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$

dir. Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için

$x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.3.3. Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sırayı korur, yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$

sağlanır.

Lemma 1.3.4. L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$,

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.3.5. L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen

$x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.2.$(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir $\Leftrightarrow$ $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Teorem 1.3.3. Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

L5′. Her $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

L5$''$. Her $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Tanım 1.3.5. Bir kafese dağılmalı kafes denir:$\Leftrightarrow$ L5$'$ özelliği (böylece L5$''$) sağlanır.

Tanım 1.3.6. L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$,

L6. $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

sağlanır.

Tanım 1.3.7. L bir sınırlı kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir:$\Leftrightarrow$ $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi x' ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

Tanım 1.3.8. $x \in L$ elemanına bir atom denir :$\Leftrightarrow$ x, $L\backslash\{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıdır.

Tanım 1.3.9. $x \in L$ elemanına bir koatom denir :$\Leftrightarrow$ x, $L\backslash\{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıdır.

Tanım 1.3.10. L sınırlı kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir: $\Leftrightarrow$ L dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Teorem 1.3.4. L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$,

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$,

L8. $(x')' = x$,

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.3.11. L bir tam kafes. $X \subseteq L$ olsun. X e L nin bir tam-alt kafesi denir $:\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq X$, $\vee A$, $\wedge A$ L de tanımlandıkları haliyle X te mevcutturlar.

Örnek 1.3.1. $L = [-1,1]$ $X = \left\{x \in R| \, |x| < \frac{1}{3}\right\} \cup \{-1, 1\}$ $A = \left(0, \frac{1}{3}\right) \subseteq X$ için X te $V_X A = 1$ ama L de $V_L A = \frac{1}{3}$ olduğundan X L nin tam-alt kafesi değildir.

Uyarı 1.3.1. L bir tam kafes, X L nin herhangi bir tam-alt kafesi olsun. $\emptyset \subseteq X$ olduğundan, tam-alt kafesin tanımına göre $\wedge \emptyset = 1$, $\vee \emptyset = 0 \in X$ olup X L nin evrensel sınırlarını içermek zorundadır.

1.4. Üçgensel Normlar (Klement, 2000)

Tanım 1.4.1. L sınırlı kafes olsun. $T: L^2 \to L$ fonksiyonuna bir üçgensel norm (kısaca t −norm) denir :⇔

i. Birleşme :

Her $x, y, z \in L$, $T\big(x, T(y, z)\big) = T(T(x, y), z)$.

ii. Değişme :

Her $x, y \in L$, $T(x, y) = T(y, x)$;

iii. Monotonluk :

$x, y, z \in L$ $x \leq y \Longrightarrow T(x, z) \leq T(y, z)$;

iv. Sınır şartı :

Her $x \in L$, $T(x, 1) = x$.

şartları sağlanır.

Örnek 1.4.1. Bazı özel t-normlar;

$T_m(x, y) = \min(x, y)$

$T_p(x, y) = x. y$

$T_L(x, y) = \max(x + y - 1,0)$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,1[^2 \\ \min(x, y), & A.T \end{cases}$$

Tanım 1.4.2. L sınırlı kafes olsun. $S: L^2 \to L$ fonksiyonuna bir üçgensel conorm (kısaca t −conorm) denir :⟺

i. Birleşme:

Her $x, y, z \in L$, $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$

ii. Değişme:

Her $x, y \in L$, $S(x, y) = S(y, x)$

iii. Monotonluk:

$x, y, z \in L \quad y \leq z \Longrightarrow S(x, y) \leq S(x, z)$

iv. Sınır şartı:

Her $x \in L$, $S(x, 0) = x$.

şartları sağlanır.

Örnek 1.4.2. Bazı özel t-conormlar:

$S_m(x, y) = \max(x, y)$

$S_p(x, y) = x + y - xy$

$$S_L(x,y) = \min(x+y,1)$$

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in \,]0,1[^2 \\ \max(x,y)\,, A.T \end{cases}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümün hazırlanmasında (Karaçal, 2006) ve (Feng vd., 2017) kaynaklarından faydalanılmıştır.

2.1. Negasyonlar

Bu çalışma boyunca, aksi belirtilmedikçe $(L, \leq)$ daima en büyük ve en küçük elemanlar 1 ve 0 olacak şekilde bir tam kafesi temsil edecektir.

Tanım 2.1.1.

i. $n: L \to L$ fonksiyonuna negasyon denir :⟺

$x, y \in L$ için $x \leq y \Rightarrow n(y) \leq n(x)$.

ii. $n: L \to L$ negasyonuna güçlü negasyon denir :⟺

Her $x \in L$, $n\big(n(x)\big) = x$.

Böylece tanımdan $n(0) = 1$ ve $n(1) = 0$ olduğu elde edilir.

Uyarı 2.1.1. Bir güçlü negasyon 1-1 fonksiyondur. Gerçekten eğer n, L kafesi üzerinde bir güçlü negasyonsa ve $n(x) = n(y)$ olacak şekilde $x, y \in L$ ise, o halde $x = n\big(n(x)\big) = n\big(n(y)\big) = y$ dir.

Teorem 2.1.1. $x_j \in L,\ j \in J$ olsun. Eğer n, L üzerinde bir güçlü negasyonsa, o halde

i. $n\big(\vee_{j\in J} x_j\big) = \wedge_{j\in J} n\big(x_j\big)$,

ii. $n\big(\wedge_{j\in J} x_j\big) = \vee_{j\in J} n\big(x_j\big)$.

İspat:

i. n L üzerinde bir güçlü negasyon olsun.

$$n\left(\bigvee_{j\in J} a_j\right) \leq \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$$

ve

$$n\left(\bigwedge_{j\in J} n(a_j)\right) \geq \bigvee_{j\in J} a_j$$

olur.

Ve böylece

$$n\left(\bigvee_{j\in J} a_j\right) \geq n\left[n\left(\bigwedge_{j\in J} n(a_j)\right)\right] = \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$$

Bundan dolayı,

$$n\left(\bigvee_{j\in J} a_j\right) = \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$$

ii. n L üzerinde bir güçlü negasyon olsun.

$$n\left(\bigwedge_{j\in J} a_j\right) \geq \bigvee_{j\in J} n(a_j)$$

ve

$$n\left[\bigvee_{j\in J} n(a_j)\right] \leq \bigwedge_{j\in J} a_j$$

olur. Ve böylece

$$n\left(\bigwedge_{j\in J} a_j\right) \leq n\left[n\bigvee_{j\in J} n(a_j)\right] = \bigvee_{j\in J} n(a_j)$$

Bundan dolayı,

$$n\left(\bigwedge_{j\in J} a_j\right) = \bigvee_{j\in J} n(a_j)$$

Tanım 2.1.2. L üzerinde bir I gerektirmesi aşağıdaki iki koşulu sağlayan L üzerinde bir ikili işlemdir:

(I1) Her $y \in L,\ I(1,y) = y$ ve $I(0,y) = 1$,

(I2) $x_1, x_2, y \in L, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow I(x_1,y) \leq I(x_2,y)$,

(I3) $x, y_1, y_2 \in L, y_1 \leq y_2 \Longrightarrow I(x,y_1) \leq I(x,y_2)$.

Örnek 2.1.1. S-gerektirmeleri, klasik gerektirme fikrine dayanır ($P \to Q, P' \vee Q$ olarak tanımlanır.) ve her $x, y \in L,\ I_S(x,y) = S(n(x),y)$ şeklinde gösterilir. Burada S bir t-conorm ve n bir güçlü negasyondur.

2.2. Çarpım Kafeslerinde Güçlü Negasyonların Direkt Parçalanışları

Bir güçlü negasyon, t-norm ve t-conormlarla bağlantılı bir genel De Morgan kuralı ortaya konmasına imkan sağlar. Bu bölümde, güçlü negasyonların direkt çarpımları ve direkt parçalanışları incelenecektir.

Önerme 2.2.1. n, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Bu takdirde

i. Eğer, x, L de bir atomsa; $n(x)$, L' de bir koatomdur.

ii. Eğer x, L de bir koatomsa; $n(x)$, L' de bir atomdur.

iii. Eğer J atomlar kümesi ve R koatomlar kümesi (L'nin) ise, bu takdirde $f: J \to R,\ x \to n(x)$ dönüşümü birebirdir.

İspat:

i. n, L üzerinde bir güçlü negasyon, x, L de bir atom olsun. O halde x $L \setminus \{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıdır. $y < x$ olan $y \in L \setminus \{0\}$ mevcut değildir. Varsayalım ki $n(x)$ koatom olmasın. O halde $n(x) < y < 1$ olan $y \in L$ mevcuttur. Buradan,

$$n\big(n(x)\big) > n(y) > n(1) = 0.$$

n güçlü negasyon olduğundan,

$$x > n(y) > 0$$

elde edilir. Bu durum x in atom olması ile çelişir. Sonuç olarak x, L de bir atomsa; $n(x)$, L'de bir koatomdur.

ii. n, L üzerinde bir güçlü negasyon, x, L de bir koatom olsun. O halde x $L \setminus \{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıdır. $x < y$ olan $y \in L \setminus \{1\}$ mevcut değildir. Varsayalım ki $n(x)$ atom olmasın. O halde $0 < y < n(x)$ olan $y \in L$ mevcuttur. Buradan

$$1 = n(0) > n(y) > n\big(n(x)\big).$$

n güçlü negasyon olduğundan,

$$1 > n(y) > x$$

elde edilir. Bu durum x in koatom olması ile çelişir. Sonuç olarak x, L de bir koatomsa; $n(x)$, L'de bir atomdur.

iii. J atomlar kümesi ve R koatomlar kümesi (L'nin) olsun.

$f: J \to R,\ x \to n(x)$ dönüşümünü ele alalım.

$f(x_1) = f(x_2)$ olsun. O halde,

$$n(x_1) = n(x_2)$$

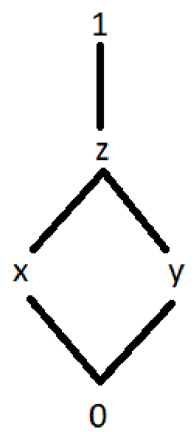
$n(n(x_1)) = n(n(x_2))$

$x_1 = x_2$ (n güçlü negasyon olduğundan)

elde edilir. Sonuç olarak f dönüşümü birebirdir.

Herhangi bir L tam kafesi için, L üzerine tanımlı, her zaman bir güçlü negasyon mevcut olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örnek verilir.

Örnek 2.2.1. $0 < x < z < 1$, $0 < y < z < 1$, $x \wedge y = 0$, $x \vee y = z$ olsun. $L = \{0, x, y, z, 1\}$ kafesi gözönüne alınsın. $\{x, y\}$ kümesi L nin atomlarının kümesi; $\{z\}$ kümesi L nin koatomlarının kümesidir. n nin L üzerinde bir güçlü negasyon olduğunu farz edelim. O zaman, Önerme 2.2.1(iii) gereği, birebir olan $f: \{x, y\} \to \{z\}$ fonksiyon vardır. Bu imkansızdır.



Şimdi kafeslerin direkt çarpımı kavramını incelenecektir. $L_{1,}, L_2, \dots, L_n$ tam kafesler olsun. . $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$ kartezyen çarpımında infimum ve supremum şöyle tanımlanır:

$$\bigwedge_{\tau \in Q} x_\tau = \left(\bigwedge_{\tau \in Q} x_{i\tau} \right)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$$

$$\bigvee_{\tau \in Q} x_\tau = \left(\bigvee_{\tau \in Q} x_{i\tau} \right)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$$

$\forall\, \Omega = \{x_\tau = (x_{1\tau}, x_{2\tau}, \dots, x_{n\tau}), \tau \in Q\} \subseteq L_1 \times\ L_2 \times \dots \times L_n$.

Yukarıda tanımlanan infumum ve supremumla birlikte $L_{1,} \times L_2 \times \dots \times L_n$ kartezyen çarpımı bir tam kafes oluşturur. Bu kafes $L_{1,}, L_2, \dots, L_n$ kafeslerinin direkt çarpımı olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.2. $L_{1,}, L_2,\ L$ nin tam alt kafesleri; $n_{1,}\ L_1$ üzerinde bir güçlü negasyon ve $n_{2,}\ L_2$ üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Her $x \in L$, $x_1 \in L_1$ ve $x_2 \in L_2$ öyleki $x = x_1 \wedge x_2$ var olsun. O zaman aşağıdaki şekilde tanımlanan $n: L \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir güçlü negasyondur:

$x_1 \wedge x_2 = x$ olduğunda $n(x) := n_1(x_1) \wedge n_2(x_2)$.

İspat: Her $x \in L$, $n\big(n(x)\big) = x$ olduğu gösterilmeli. Keyfi bir $x \in L$ alınsın. Hipotez gereği $x = x_1 \wedge x_2$ ve $n(x) = n_1(x_1) \wedge n_2(x_2)$ olacak şekilde $x_1 \in\ L_1$ ve $x_2 \in\ L_2$ var olsun. O zaman $n\big(n(x)\big) = n_1(n_1(x_1)) \wedge n_2(n_2(x_2)) = x_1 \wedge x_2 = x$ olur.

$x \le y$ olacak şekilde $x, y \in L$ alalım. $x = x_1 \wedge x_2$; $x_1 \in\ L_1$ ve $x_2 \in\ L_2$ ve $y = y_1 \wedge y_2$; $y_1 \in\ L_1$ ve $y_2 \in\ L_2$ olsun. Negasyon tanımından;

$n(y) = n_1(y_1) \wedge n_2(y_2) \le n_1(x_1 \wedge y_1) \wedge n_2(x_2 \wedge y_2) = n(x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2) = n(x \wedge y) = n(x)$

Böylece n, L üzerinde bir güçlü negasyondur.

Güçlü negasyonlar için iç direkt çarpımının tanımı aşağıdaki şekilde verilecektir.

Bu tanım, evrensel cebirsel yapılar için iç direkt çarpımın özel bir durumudur.

Tanım 2.2.1. Önerme 2.2.2 de inşa edilen n_1 ve n_2 güçlü negasyonlarının iç direkt çarpımı olarak adlandırılır ve $n_1 \otimes n_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2. n bir L kafesi üzerinde, n^* bir M kafesi üzerinde güçlü negasyonlar olsunlar. Her $a \in L$, $H\big(n(a)\big) = n^*(H(a))$ olacak şekilde $H: L \to M$ bir kafes izomorfisi mevcutsa n ve n^* negasyonlarına izomorftur denir.

Önerme 2.2.3. L_1, L_2 tam kafesler, $L = L_1 \times L_2$ ve n L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. O halde;

i. $n(0,1) = (1,0) \Leftrightarrow n(1,0) = (0,1)$

ii. $n(0,1) = (0,1) \Leftrightarrow n(1,0) = (1,0)$

İspat: i. maddesi, güçlü negasyonun tanımından açık olduğu için yalnızca ii. maddesi gösterilecektir.

ii. '$\Rightarrow$' $n(0,1) = (0,1)$ ve $n(1,0) = (k,t)$ olsun. $k \in L_{1,}$ $t \in L_2$. Teorem 2.1.1 gereği şunlar elde edilir:

$(0,0) = n(1,1) = n((1,0) \vee (0,1)) = n(1,0) \wedge n(0,1) = (k,t) \wedge (0,1) = (0,t),$

$(1,1) = n(0,0) = n\big((1,0) \wedge (0,1)\big) = n(1,0) \vee n(0,1) = (k,t) \vee (0,1) = (k,1).$

Bu yüzden $k = 1$, $t = 0$ elde edilir.

'$\Leftarrow$' $n(1,0) = (1,0)$ ve $n(0,1) = (p,q)$ olsun. $p \in L_{1,}$ $q \in L_2$. Teorem 2.1.1 gereği aşağıdakiler elde edilir:

$(0,0) = n(1,1) = n((1,0) \vee (0,1)) = n(1,0) \wedge n(0,1) = (1,0) \wedge (p,q) = (p,0),$

$(1,1) = n(0,0) = n\big((1,0) \wedge (0,1)\big) = n(1,0) \vee n(0,1) = (1,0) \vee (p,q) = (1,q).$

Bu yüzden $p = 0$, $q = 1$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem yardımıyla kafeslerin kartezyen çarpımı üzerinde güçlü negasyonların direkt çarpımı karakterize edilecektir.

Teorem 2.2.1. L_1 *ve* L_2 iki tam kafes, $L = L_1 \times L_2$ bunların direkt çarpım kafesi ve n L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

i. $n(0,1) = (1,0)$ (ya da $n(1,0) = (0,1)$)

ii. n L_1 üzerinde bir n_1 güçlü negasyonunun ve L_2 üzerinde bir n_2 güçlü negasyonunun direkt çarpımıdır.

iii. n, $L_1 \times \{1\}$ üzerinde bir $n_1{}^*$ güçlü negasyonunun ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde bir $n_2{}^*$ güçlü negasyonunun iç direkt çarpımıdır.

İspat:

i $\Longrightarrow$ ii $a_{x_1} \in L_1$, $c_{x_1} \in L_2$ için $x_1 \in L_1$ ve $n(x_1, 1) = (a_{x_1}, c_{x_1})$ olsun.

$n(x_1, 1) \leq n(0,1) = (1,0)$ olduğundan, $c_{x_1} = 0$ ve $n(x_1, 1) = (a_{x_1}, 0)$ dır. Aşağıdaki fonksiyon göz önüne alınsın:

$n_1 : L_1 \to L_1$, $x_1 \to n_1(x_1) \coloneqq a_{x_1}$ $\quad (n(x_1, 1) = (a_{x_1}, 0))$

n_1 fonksiyonu iyi tanımlıdır. Gerçekten $x_1, y_1 \in L_1$, $x_1 = y_1$ olsun. Buradan

$n_1(x_1) = a_{x_1}$; $n(x_1, 1) = (a_{x_1}, 0)$ ve $n_1(y_1) = a_{y_1}$; $n(y_1, 1) = (a_{y_1}, 0)$ olur.

$x_1 = y_1 \Rightarrow (x_1, 1) = (y_1, 1) \Rightarrow n(x_1, 1) = n(y_1, 1) \Rightarrow a_{x_1} = a_{y_1}$ elde edilir ki buradan $n_1(x_1) = n_1(y_1)$ bulunur.

Keyfi bir $x_1 \in L$ için $n_1\big(n_1(x_1)\big) = x_1$ olduğunu kanıtlayalım.

$n_1(x_1) = a_{x_1}$; $n(x_1, 1) = (a_{x_1}, 0)$ olduğu biliniyor. $(a_{x_1}, 1) > (a_{x_1}, 0)$ olduğundan, $n\big(a_{x_1}, 1\big) < n\big(a_{x_1}, 0\big) = (x_1, 1)$ dir. Diğer taraftan $n\big(a_{x_1}, 1\big) = n(n_1(x_1), 1) = (n_1\big(n_1(x_1)\big), 0)$ dır. $n_1\big(n_1(x_1)\big) = k$ olarak alınırsa, $(k, 0) = n(a_{x_1}, 1) < (x_1, 1)$ ve $x_1 \geq k$ elde edilir.

$t \in L_1, m \in L_2$ için $n(x_1, 0) = (t, m)$ olsun. $n(0,1) = (1,0)$ olduğundan, Önerme 2.2.3 (i) gereği, $n(1,0) = (0,1)$ elde edilir. $n(1,0) = (0,1)$ eşitliğini kullanarak, $(t, m) = n(x_1, 0) \geq n(1,0) = (0,1)$ elde edilir ve böylece $m = 1$ olur. Bu yüzden, $(t, 1) = n(x_1, 0)$ dır. Diğer taraftan, $n(x_1, 0) > n(x_1, 1) = (a_{x_1}, 0)$ dır ve bu yüzden $n(x_1, 0) \geq (a_{x_1}, 1)$ dir. Buradan $(x_1, 0) = n\big(n(x_1, 0)\big) \leq n\big(a_{x_1}, 1\big) = (k, 0)$ elde edilir. Böylece $x_1 \leq k$ dır. Buradan $x_1 = k$ olduğu gösterilmiş olur ki bu $n_1\big(n_1(x_1)\big) = x_1$ olduğu anlamına gelir.

$x_1, y_1 \in L_1$ ve $x_1 \leq y_1$ olsun. $n_1(x_1) \geq n_1(y_1)$ olduğu gösterilmeli.

$(x_1, 1) \leq (y_1, 1)$ olduğundan,

$(a_{x_1}, 0) = n(x_1, 1) \geq n(y_1, 1) = (a_{y_1}, 0)$

$n_1(\, x_1) = a_{x_1} \geq a_{y_1} = n_1(y_1)$

Böylece n_1 in L_1 üzerinde bir güçlü negasyon olduğu elde edilir.

$a_{x_1} \in L_1$, $c_{x_2} \in L_2$ için $x_2 \in L_2$ ve $n(1, x_2) = (a_{x_1}, c_{x_2})$ olsun.

$n(1, x_2) \leq n(1,0) = (0,1)$ olduğundan, $a_{x_1} = 0$ ve $n(1, x_2) = (0, c_{x_2})$ dır. Aşağıdaki fonksiyon göz önüne alınsın:

$n_2 : L_2 \to L_2$, $x_2 \to n_2(x_2) \coloneqq c_{x_2} \quad (n(1, x_2) = (0, c_{x_2})\,)$

n_2 fonksiyonu iyi tanımlıdır. Gerçekten $x_2, y_2 \in L_1$, $x_2 = y_2$ olsun. Buradan

$n_2(\, x_2) = c_{x_2}$; $n(1, x_2) = (0, c_{x_2})$ ve $n_2(\, y_2) = c_{y_2}$; $n(1, y_2) = (0, c_{y_2})$ olur.

$x_2 = y_2 \Rightarrow (1, x_2) = (1, y_2) \Rightarrow n(1, x_2) = n(1, y_2) \Rightarrow c_{x_2} = c_{y_2}$

Keyfi bir $x_2 \in L$ için $n_2\big(\, n_2(\, x_2)\big) = x_2$ olduğunu kanıtlayalım.

$n_2(\, x_2) = c_{x_2}$; $n(1, x_2) = (0, c_{x_2})$ olduğu biliniyor. $(1, c_{x_2}) > (0, c_{x_2})$ olduğundan, $n(1, c_{x_2}) < n(0, c_{x_2}) = (1, x_2)$ dir. Diğer taraftan $n\big(1, c_{x_2}\big) = n\big(1, n_2(\, x_2)\big) = (0, n_2\big(\, n_2(\, x_2)\big))$ dır. $n_2\big(\, n_2(\, x_2)\big) = l$ olarak alınırsa, $(0, l) = n(1, c_{x_2}) < (1, x_2)$ ve $x_2 \geq l$ elde edilir.

$p \in L_1$, $q \in L_2$ için $n(0, x_2) = (p, q)$ olsun. $n(0,1) = (1,0)$ olduğundan, $(p, q) = n(0, x_2) \geq n(0,1) = (1,0)$ elde edilir ve böylece $p = 1$ olur. Bu yüzden, $(1, q) = n(0, x_2)$dır. Diğer taraftan, $n(0, x_2) > n(1, x_2) = (0, c_{x_2})$ dır ve bu yüzden $n(0, x_2) \geq (1, c_{x_2})$ dir. Buradan $(0, x_2) = n\big(n(0, x_2)\big) \leq n\big(1, c_{x_2}\big) = (0, l)$ elde edilir. Böylece $x_2 \leq l$ dır. $x_2 = l$ olduğu gösterilmiş olur ki bu $n_2\big(\, n_2(\, x_2)\big) = x_2$ olduğu anlamına gelir.

x_2, $y_2 \in L_2$ ve $x_2 \leq y_2$ olsun. $n_2(\, x_2) \geq n_2(y_2)$ olduğu gösterilmeli. $(1, x_2) \leq (1, y_2)$ olduğundan

$(0, c_{x_2}) = n(1, x_2) \geq n(1, y_2) = (0, c_{y_2})$

$n_2(\, x_2) = c_{x_2} \geq c_{y_2} = n_2(y_2)$

Böylece n_2 in L_2 üzerinde bir güçlü negasyon olduğu elde edilir.

$n = n_1 \times n_2$ eşitliğini ispat etmek için, $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$ olsun. O halde Teorem 2.1.1 ile n_1 ve n_2 nin tanımları gereği,

$$n(x_1, x_2) = n\big((x_1, 1) \wedge (1, x_2)\big) = n(x_1, 1) \vee n(1, x_2) = (a_{x_1}, 0) \vee (0, b_{x_2})$$
$$= (a_{x_1}, b_{x_2}) = (n_1(\, x_1), n_2(\, x_2)) = n_1 \times n_2(x_1, x_2)$$

elde edilir. Böylece $n = n_1 \times n_2$ dir.

ii $\Longrightarrow$ iii $n = n_1 \times n_2$ olsun. $L_1 \times \{1\}$ üzerinde $n_1{}^*$, $n_1{}^*(x_1, 1) = (n_1(\, x_1), 1)$

olarak tanımlansın. $L_1 \times \{1\}$ üzerinde $n_1{}^*$ bir güçlü negasyondur. Gerçekten:

Her $(x_1, 1) \in L_1 \times \{1\}$, $n_1{}^*\big(n_1{}^*(x_1, 1)\big) = (n_1(n_1(x_1)), 1) = (x_1, 1)$.

$(x_1, 1), (y_1, 1) \in L_1 \times \{1\}$ için $(x_1, 1) \leq (y_1, 1)$ olsun.

Buradan $x_1 \leq y_1$ olur. n_1 bir güçlü negasyon olduğundan $n_1(x_1) \geq n_1(y_1)$ olur ve buradan $(n_1(x_1), 1) \geq (n_1(y_1), 1)$ elde edilir ki bu $n_1{}^*(x_1, 1) \geq n_1{}^*(y_1, 1)$ olduğu anlamına gelir. Böylece $n_1{}^*$ ın $L_1 \times \{1\}$ üzerinde bir güçlü negasyon olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde $\{1\} \times L_2$ üzerinde $n_2{}^*(1, x_2) = \big(1, n_2(\, x_2)\big)$ olarak tanımlanırsa $\{1\} \times L_2$ üzerinde $n_2{}^*$ bir güçlü negasyondur. Gerçekten :

Her $(1, x_2) \in \{1\} \times L_2$ $n_2{}^*\big(n_2{}^*(1, x_2)\big) = (1, n_2(n_2(x_2))) = (1, x_2)$.

$(1, x_2), (1, y_2) \in \{1\} \times L_2$, $(1, x_2) \leq (1, y_2)$ olsun.

Buradan $x_2 \leq y_2$ olur. n_2 güçlü negasyon olduğundan $n_2(x_2) \geq n_2(y_2)$ olur ve buradan $(1, n_2(x_2)) \geq (1, n_2(y_2))$ elde edilir ki bu $n_2{}^*(1, x_2) \geq n_2{}^*(1, y_2)$ olduğu anlamına gelir.

Böylece $n_2{}^*$ ın $\{1\} \times L_2$ üzerinde bir güçlü negasyon olduğu gösterilmiş olur.

$(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$ olsun. Bu takdirde,

$$n(x_1, x_2) = \big(n_1(x_1), n_2(x_2)\big) = (n_1(x_1), 1) \wedge \big(1, n_2(x_2)\big) = n_1{}^*(x_1, 1) \wedge n_2{}^*(1, x_2)$$

Bu $n = n_1{}^* \otimes n_2{}^*$ olduğu anlamına gelir.

iii $\Longrightarrow$ i $n_1{}^* ve\ n_2{}^*$ $L_1 \times \{1\}$ ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde güçlü negasyonlar olduğundan, $n_1{}^*(0,1) = (1,1)$ ve $n_2{}^*(1,1) = (1,0)$ olur ve böylece

$$n(0,1) = n_1{}^*(0,1) \wedge n_2{}^*(1,1) = (1,1) \wedge (1,0) = (1,0)$$

elde edilir.

Uyarı 2.2.1. Önerme 2.2.2 nin dualini kullanarak tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların bir diğer iç direkt çarpımı oluşturulursa Teorem 2.2.1 deki sonuçların aynısı elde edilir. Çünkü bu durumda, i. ve ii. aynıdır fakat iii. şu şekilde değişir:

iii. n , $L_1 \times \{0\}$ üzerindeki $n_1{}'$ güçlü negasyonu ve $\{0\} \times L_2$ üzerindeki $n_2{}'$ güçlü negasyonun iç direkt çarpımıdır.

$L_1 \times \{1\}$ üzerinde $n_1{}^*$ güçlü negasyonu $L_1 \times \{0\}$ üzerinde $n_1{}'$ güçlü negasyonuna izomorf ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde $n_2{}^*$ güçlü negasyonu $L_2 \times \{0\}$ üzerinde $n_2{}'$ güçlü negasyonuna izomorf olduğundan, Önerme 2.2.2 ile veya duali ile çalışmak arasında hiçbir fark yoktur.

Önerme 2.2.4. $L = [0,1]^2$ ve n, L üzerine bir güçlü negasyon olsun. O halde $n(0,1) = (1,0)$ ya da $n(0,1) = (0,1)$

İspat: Teorem 2.1.1 gereği aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$(0,0) = n(1,1) = n((1,0) \vee (0,1)) = n(1,0) \wedge n(0,1)$$

$$(1,1) = n(0,0) = n\big((1,0) \wedge (0,1)\big) = n(1,0) \vee n(0,1).$$

Böylece $n(0,1)$, $n(1,0) \in [0,1]^2$ elemanları birbirlerinin komplementidirler. $[0,1]^2$ içinde komplementli tüm elemanların kümesi $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ve

$n(0,1)$ $(0,0)$ dan ve $(1,1)$ den farklı olduğundan, $n(0,1) = (1,0)$ veya $n(0,1) = (0,1)$ dir.

Örnek 2.2.2. $n: [0,1]^2 \to [0,1]^2$, $n(x,y) = (1-y, 1-x)$ olsun. O halde n $[0,1]^2$ üzerinde bir güçlü negasyondur. $n(1,0) = (1,0)$ olduğundan, Teorem 2.2.1 gereği n [0,1] üzerinde iki güçlü negasyonun bir direkt çarpımı değildir.

2.3. Negasyonlar Yardımıyla Elde Edilen (Uni-nullnorm, Null-uninorm) Dualitesi

Tanım 2.3.1. $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemine bir uninorm denir :⇔ U değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve her $x \in [0,1]$, $U(x,e) = x$ olan $e \in [0,1]$ nötral elemana sahiptir.

Açıkça $e = 1$ için U bir t −norm, $e = 0$ için U bir t −conormdur.

Tanım 2.3.2. $N: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemine bir nullnorm denir :⇔ N değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve her $x \in [0,1]$, $N(x,a) = a$ olan $a \in [0,1]$ sıfırlayan elemana sahiptir öyle ki:

i. Her $x \in [0,a], N(x,0) = x$,
ii. Her $x \in [a,1]$, $N(x,1) = x$.

Açıkça, $a = 0$ ise N bir *t*-norm, $a = 1$ ise N bir *t*-conormdur.

Böylece uninormlar ve nullnormlar *t*-norm ve *t*-conormların birer genelleştirmesidir.

Tanım 2.3.3. $V: [0,1]^2 \to [0,1]$ değişmeli bir ikili işlem olsun.

$0 \leq e_1 \leq a \leq e_2 \leq 1$ olan $\{e_1, e_2\}_a$ elemanlarına V nin 2- nötral elemanı denir:⇔

Her $x \in [0, a]$, $V(e_1, x) = x$

Her $x \in [a, 1]$, $V(e_2, x) = x$.

Tanım 2.3.4. $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemine bir 2-uninorm denir:⟺ U değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve $\{e_1, e_2\}_a$ 2- nötral elemana sahiptir.

Uyarı 2.3.1. t-normlar ve t-conormlar 2-uninormların özel durumlarıdır. Bir 2-uninorm, $e_1 = a = e_2 = 1$ veya $0 = e_1 = a \leq e_2 = 1$ ise bir t-norm, eğer $e_1 = a = e_2 = 0$ veya $0 = e_1 \leq a = e_2 = 1$ ise bir t-conormdur.

Tanım 2.3.5. $UN: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemine bir uni-nullnorm denir:⟺ UN, $a \in [0,1]$ elemanının $[e, 1]$ üzerinde sıfırlayan olduğu, $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemana sahip olan bir 2-uninormdur.

Tanımın sonucu olarak,

$0 \leq e \leq a \leq 1$ için

Her $x \in [0, a]$, $UN(e, x) = x$,

Her $x \in [a, 1]$, $UN(x, 1) = x$,

Her $x \in [e, 1]$, $UN(x, a) = a$.

Tanım 2.3.6. $NU: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemine bir null-uninorm denir:⟺ NU, $a \in [0,1]$ elemanının $[0, e]$ üzerinde sıfırlayan olduğu, $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemana sahip olan bir 2-uninormdur.

Tanımın sonucu olarak,

$0 \leq a \leq e \leq 1$ için

Her $x \in [0, a]$, $NU(0, x) = x$,

Her $x \in [a, 1]$, $NU(x, e) = x$,

Her $x \in [0, e]$, $NU(x, a) = a$.

Uyarı 2.3.2. $\{e,1\}_a$ 2- nötral elemanlı bir uni-nullnorm UN, $e=0$ ise bir nullnorm, $a=1$ ise bir uninorm, $e=0$ ve $a=1$ ise bir t-conorm, $e=a=0$ veya $e=a=1$ ise bir t-normdur. $\{0,e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninorm NU, $e=1$ ise bir nullnorm, $a=0$ ise bir uninorm, $e=1$ ve $a=0$ ise bir t-norm, $e=a=0$ veya $e=a=1$ ise bir t-conormdur.

Tanım 2.3.7. Bir $\{e,1\}_a(\{0,e\}_a)$ 2-nötral elemanlı uni-nullnorma (null-uninorma) tamdır denir:$\Leftrightarrow$ $0<e<a<1$ $(0<a<e<1)$.

Tanım 2.3.8. $V:[0,1]^2\to[0,1]$ bir ikili işlem ve $n:[0,1]\to[0,1]$ bir güçlü negasyon olsun. V^* ikili işlemine V nin n −dualidir denir:$\Leftrightarrow$ $V^*:[0,1]^2\to[0,1]$ ikili işlemi $V^*(x,y)=n\Big(V\big(n(x),n(y)\big)\Big)$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.3.1. $n:[0,1]\to[0,1]$ bir güçlü negasyon olsun. Eğer $UN:[0,1]^2\to[0,1]$ ikili işlemi $\{e,1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir tam uni-nullnorm ise bu takdirde UN nin n- duali olan UN^* ikili işlemi $\{0,n(e)\}_{n(a)}$ 2-nötral elemanlı bir tam null-uninormdur.

İspat: $UN:[0,1]^2\to[0,1]$ $\{e,1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir tam uni-nullnorm olsun. $UN^*:[0,1]^2\to[0,1]$, UN nin n-duali olduğundan, $UN^*(x,y)=n\big(UN(n(x),n(y))\big)$ dir.

UN değişme özelliğini sağladığından,

her $x,y\in[0,1]$, $UN(n(x),n(y))=UN\big(n(y),n(x)\big)$.

$$UN^*(x,y)=n\big(UN(n(x),n(y))\big)=n\Big(UN\big(n(y),n(x)\big)\Big)=UN^*(y,x)$$

elde edilir. Böylece UN^* değişmelidir.

UN^* ın birleşme özelliğini göstermek için $x,y,z\in[0,1]$ keyfi alınsın.

$$UN^*(UN^*(x,y),z)=n\Big(UN\Big(n\big(UN^*(x,y)\big),n(z)\Big)\Big)$$

$$=n\bigg(UN\bigg(n\Big(n\Big(UN\big(n(x),n(y)\big)\Big)\Big),n(z)\bigg)\bigg)$$

$$= n\left(UN\left(UN\big(n(x), n(y)\big), n(z)\right)\right) \qquad (n \text{ güçlü negasyon olduğundan})$$

$$= n\left(UN\big(n(x), UN(n(y), n(z))\big)\right). \qquad (\text{UN birleşmeli olduğundan})$$

Öte yandan

$$UN^*\big(x, UN^*(y,z)\big) = n\left(n(x), UN\left(n\big(UN^*(y,z)\big)\right)\right)$$

$$= n\left(n(x), UN\left(n\left(n\left(UN\big(n(y), n(z)\big)\right)\right)\right)\right)$$

$$= n\left(n(x), UN\left(UN\big(n(y), n(z)\big)\right)\right) \qquad (\text{n güçlü negasyon olduğundan})$$

$$= n\left(UN\big(n(x), UN(n(y), n(z))\big)\right) \qquad (UN \text{ birleşmeli olduğundan})$$

elde edilir. Böylece birleşme özelliği gösterilmiş olur.

Azalmayanlık özelliği için $x, y, z \in [0,1]$ ve $y \leq z$ olsun.

$$UN^*(x, y) = n\big(UN(n(x), n(y))\big)$$

$y \leq z$ ve n güçlü negasyon olduğundan $n(z) \leq n(y)$, UN azalmayan olduğundan $UN(n(x), n(z)) \leq UN(n(x), n(y))$ olur.

n artmayan olduğundan $n\left(UN\big(n(x), n(y)\big)\right) \leq n\left(UN\big(n(x), n(z)\big)\right)$. Buradan $UN^*(x, y) \leq UN^*(x, z)$ elde edilir.

Şimdi $n(e)$ nin $[n(a), 1]$ de UN^* ın nötral elemanı olduğu gösterilsin. Her $x \in [0, a]$, UN, $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı uni-nullnorm olduğundan $UN(e, x) = x$ dir. Buradan $n(UN(e, x)) = n(x)$ elde edilir.

n güçlü negasyon olduğundan,

$n\left(UN\big(n(n(e)), n(n(x))\big)\right) = n(x)$ ve buradan,

$UN^*(n(e), n(x)) = n(x)$ bulunur.

$0 \leq x \leq a$ olduğundan,

$n(a) \leq n(x) \leq n(0) = 1.$

$y := n(x) \in [n(a), 1]$ olarak alınırsa, her $y \in [n(a), 1]$, $UN^*(n(e), y) = y$ olup $n(e)$ nin $[n(a), 1]$ de nötral eleman olduğu elde edilir.

Şimdi 0 ın $[0, n(a)]$ da nötral eleman olduğu gösterilsin. UN, $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı uni-nullnorm olduğundan her $x \in [a, 1]$, $UN(x, 1) = x$ olduğu elde edilir.

n güçlü negasyon olduğundan,

$UN\big(n(n(x)), n(n(1))\big) = x$

Buradan

$n\left(UN\left(n(n(x)), n(n(1))\right)\right) = n(x)$

$n(1) = 0$ olduğundan,

$n(x) = UN^*(n(x), n(1)) = UN^*(n(x), 0).$

$a \leq x \leq 1$ olduğundan $n(1) = 0 \leq n(x) \leq n(a).$

$y := n(x) \in [0, n(a)]$ olarak tanımlanırsa her $y \in [0, n(a)]$, $UN^*(y, 0) = y$ olup 0 ın $[0, n(a)]$ da nötral eleman olduğu elde edilir.

Son olarak $n(a)$ nın UN^* ın $[0, n(e)]$ üzerinde sıfırlayanı olduğu gösterilsin. UN $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı ve $[e, 1]$ de a sıfırlayanlı bir uni-nullnorm olduğundan her $x \in [e, 1]$, $UN(a, x) = a$ dır.

n güçlü negasyon olduğundan,

$UN\left(n(n(a)), n(n(x))\right) = a$ dır.

Buradan

$n\left(UN\left(n(n(a)), n(n(x))\right)\right) = n(a)$ ve böylece

$UN^*(n(a), n(x)) = n(a)$ eşitliği bulunur.

n güçlü negasyon ve $e \leq x \leq 1$ olduğundan $n(1) = 0 \leq n(x) \leq n(e)$.

$y \coloneqq n(x) \in [0, n(e)]$ olarak tanımlanırsa her $y \in [0, n(e)]$, $UN^*(n(a), y) = n(a)$ olur ve bu $n(a)$ nın $[0, n(e)]$ üzerinde UN^* ın sıfırlayanı olduğunu gösterir.

UN tam uni-nullnorm olduğundan $0 < e < a < 1$ dir. n güçlü negasyon olduğundan $n(1) < n(a) < n(e) < n(0)$ elde edilir. Böylece $0 < n(a) < n(e) < 1$ dir.

Sonuç olarak UN^*ın $\{0, n(e)\}_{n(a)}$ 2-nötral elemanlı ve $[0, n(e)]$ üzerinde $n(a)$ sıfırlayanlı bir tam null-uninorm olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.3.2. $n: [0,1] \to [0,1]$ bir güçlü negasyon olsun. Eğer

$NU: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemi $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir tam null-uninorm ise bu takdirde NU nin n-duali olan NU^* ikili işlemi $\{n(e), 1\}_{n(a)}$ 2-nötral elemanlı bir tam uni-nullnormdur.

İspat: $NU: [0,1]^2 \to [0,1]$ $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir tam null-uninorm olsun. $NU^*: [0,1]^2 \to [0,1]$, NU nin n-duali olduğundan, $NU^*(x, y) = n\big(NU(n(x), n(y))\big)$ dir.

NU değişme özelliğini sağladığından, her $x, y \in [0,1]$,

$NU(n(x), n(y)) = NU\big(n(y), n(x)\big)$.

$NU^*(x, y) = n\big(NU(n(x), n(y))\big) = n\Big(NU\big(n(y), n(x)\big)\Big) = NU^*(y, x)$

olur ve böylece NU^* değişmelidir.

NU^* ın birleşme özelliğini göstermek için $x, y, z \in [0,1]$ keyfi alınsın.

$$NU^*(NU^*(x,y),z) = n\left(NU\left(n\big(NU^*(x,y)\big), n(z)\right)\right)$$

$$= n\left(NU\left(n\left(n\left(NU\big(n(x),n(y)\big)\right)\right), n(z)\right)\right)$$

$$= n\left(NU\left(NU\big(n(x),n(y)\big), n(z)\right)\right)$$ (n güçlü negasyon olduğundan)

$$= n\left(NU\big(n(x), NU(n(y),n(z))\big)\right).$$ (NU birleşmeli olduğundan)

Öte yandan

$$NU^*\big(x, NU^*(y,z)\big) = n\left(NU\left(n(x), \left(n\big(NU^*(y,z)\big)\right)\right)\right)$$

$$= n\left(NU\left(n(x), \left(n\left(n\left(NU\big(n(y),n(z)\big)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= n\left(NU\left(n(x), \left(NU\big(n(y),n(z)\big)\right)\right)\right)$$ (n güçlü negasyon olduğundan)

$$= n\left(NU\big(n(x), NU(n(y),n(z))\big)\right)$$ (NU birleşmeli olduğundan)

elde edilir. Böylece birleşme özelliği gösterilmiş olur.

Azalmayanlık özelliği için $x, y, z \in [0,1]$ ve $y \leq z$ olsun.

$NU^*(x,y) = n\big(NU(n(x),n(y))\big)$.

$y \leq z$ ve n güçlü negasyon olduğundan,

$n(z) \leq n(y)$.

NU azalmayan olduğundan,

$NU(n(x),n(z)) \leq NU(n(x),n(y))$.

n artmayan olduğundan,

$n\left(NU\big(n(x),n(y)\big)\right) \leq n\left(NU\big(n(x),n(z)\big)\right).$

Buradan $NU^*(x,y) \leq NU^*(x,z)$ elde edilir.

Şimdi $n(e)$ nin $[0,n(a)]$ de NU^* ın nötral elemanı olduğu gösterilsin. Her $x \in [a,1]$, NU, $\{0,e\}_a$ 2-nötral elemanlı null-uninorm olduğundan $NU(e,x) = x$ tir. Buradan $n(NU(e,x)) = n(x)$.

n güçlü negasyon olduğundan,

$n\left(NU\big(n\big(n(e)\big),n(n(x))\big)\right) = n(x)$ ve buradan,

$NU^*(n(e),n(x)) = n(x)$ bulunur.

$a \leq x \leq 1$ olduğundan,

$0 = n(1) \leq n(x) \leq n(a).$

$y \coloneqq n(x) \in [n(a),1]$ olarak alınırsa, her $y \in [0,n(a)]$ için $NU^*(n(e),y) = y$ olup $n(e)$ nin $[0,n(a)]$ de nötral eleman olduğu elde edilir.

Şimdi 1 in $[n(a),1]$ da nötral eleman olduğu gösterilsin. NU, $\{0,1\}_a$ 2-nötral elemanlı null-uninorm olduğundan,

Her $x \in [0,a]$, $NU(0,x) = x$. Buradan $n\big(NU(0,x)\big) = n(x)$ elde edilir.

n güçlü negasyon olduğundan,

$n\big(NU(n(n(0)),n(n(x)))\big) = n(x).$

Buradan,

$NU^*(n(0),n(x)) = n(x).$

$n(0) = 1$ olduğundan,

$NU^*(n(0),n(x)) = NU^*(1,n(x)) = n(x).$

$0 \leq x \leq a$ olduğundan $n(a) \leq n(x) \leq n(0) = 1.$

$y \coloneqq n(x) \in [n(a), 1]$ olarak tanımlanırsa her $y \in [n(a), 1]$, $NU^*(1, y) = y$ olup 1 in $[n(a), 1]$ de nötral eleman olduğu elde edilir.

Son olarak $n(a)$ nın NU^* ın $[n(e), 1]$ üzerinde sıfırlayanı olduğu gösterilsin.

NU $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı ve $[0, e]$ de a sıfırlayanlı bir null-uninorm olduğundan her $x \in [0, e]$, $NU(a, x) = a$.

n güçlü negasyon olduğundan,

$NU\left(n(n(a)), n(n(x))\right) = a$ dır.

Buradan,

$n\left(NU\left(n(n(a)), n(n(x))\right)\right) = n(a)$ ve böylece

$NU^*(n(a), n(x)) = n(a)$ eşitliği bulunur.

n güçlü negasyon ve $0 \leq x \leq e$ olduğundan $n(e) \leq n(x) \leq n(0) = 1$ dir.

$y \coloneqq n(x) \in [n(e), 1]$ olarak tanımlanırsa her $y \in [n(e), 1]$, $NU^*(n(a), y) = n(a)$ olur ve bu $n(a)$ nın $[n(e), 1]$ üzerinde NU^* ın sıfırlayanı olduğunu gösterir.

NU tam null-uninorm olduğundan $0 < a < e < 1$ dir. n güçlü negasyon olduğundan $n(1) < n(e) < n(a) < n(1)$ elde edilir. Böylece $0 < n(e) < n(a) < 1$ dir.

Sonuç olarak NU^*ın $\{n(e), 1\}_{n(a)}$ 2-nötral elemanlı ve $[n(e), 1]$ üzerinde $n(a)$ sıfırlayanlı bir tam uni-nullnorm olduğu gösterilmiş olur.

2.4. Güçlü Negasyonlar Yardımıyla Tanımlanan S-Gerektirme Operatörlerinin Çarpım Kafesleri Üzerindeki Direkt Parçalanışları

Öncelikle $L = L_1 \times L_2$ çarpım kafesleri üzerindeki bir t-norm, L_1 üzerindeki ve L_2 üzerindeki t-normların direkt çarpımlarıdır$\Leftrightarrow$ Her $(x,y),(z,t) \in L$,

$$T\big((x,y),(z,t)\big) = T\big((x,0),(z,0)\big) \vee T\big((0,y),(0,t)\big) \qquad (2)$$

olduğu (Karaçal, 2005) Uyarı 1 de verilmiştir.

Dual olarak t-conormlar için aşağıdakiler verilir.

$L = L_1 \times L_2$ çarpım kafesi üzerindeki bir t-conorm L_1 üzerindeki ve L_2 üzerindeki t-conormların direkt çarpımlarıdır $\Leftrightarrow$ Her $(x,y),(z,t) \in L$,

$$S\big((x,y),(z,t)\big) = S\big((x,1),(z,1)\big) \wedge S\big((1,y),(1,t)\big) \qquad (3)$$

Aşağıdaki önerme ispatsız olarak verilecektir.

Önerme 2.4.1. L_1ve L_2, L nin birer tam alt kafesi, I_1 L_1 üzerinde, I_2 L_2 üzerinde bir gerektirme olsun. Eğer her $x \in L$, $x = x_1 \wedge x_2$ olacak şekilde $x_1 \in L_1$ ve $x_2 \in L_2$ teklikle belirli ise bu taktirde aşağıdaki şekilde tanımlanan $I: L \times L \to L$ dönüşümü L üzerinde bir gerektirmedir:

$$I(x,y) = I_1(x_1,y_1) \wedge I_2(x_2,y_2),\ x = x_1 \wedge x_2\ , y = y_1 \wedge y_2, x_i, y_i \in L_i, i \in \{1,2\}.$$

Tanım 2.4.1. Yukarıdaki önermede verilen I gerektirmesine I_1 ve I_2 gerektirmelerinin iç direkt çarpımı denir ve $I_1 \otimes I_2$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.2. L_1 ve L_2 iki kafes $L = L_1 \times L_2$, I_1 L_1 üzerinde, I_2 L_2 üzerinde birer gerektirme olsunlar. Bu taktirde I_1ve I_2 sırasıyla $I \downarrow (L_1 \times \{1\})$ ve $I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ na izomorftur. Dahası $I = I \downarrow (L_1 \times \{1\}) \otimes I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ dır.

Tersine $I = I \downarrow (L_1 \times \{1\}) \otimes I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ olsun. Bu taktirde $I = I_1 \times I_2$ dir. Burada I_1 L_1 üzerinde, I_2 L_2 üzerinde bir gerektirmedir öyle ki I_1 ve I_2 sırasıyla $I \downarrow (L_1 \times \{1\})$ ve $I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ ye izomorftur.

İspat: Her $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$,

$$I(x_1, 1) = I\big((x_1, 1) \wedge (1,1)\big) = I_1(x_1, 1) \wedge I_2(1,1) = I_1(x_1, 1)$$

ve

$$I(1, x_2) = I\big((1,1) \wedge (1, x_2)\big) = I_1(1,1) \wedge I_2(1, x_2) = I_2(1, x_2)$$

olduğundan $I \downarrow (L_1 \times \{1\}) = (I_1, 1)$, $I \downarrow (\{1\} \times L_2) = (1, I_2)$ dir. Böylece $I \downarrow (L_1 \times \{1\})$ ve $I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ sırasıyla $L_1 \times \{1\}$ ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde birer gerektirme olup sırasıyla I_1 ve I_2 ye izomorftur. Tanım 2.4.1 gereği

$I = I \downarrow (L_1 \times \{1\}) \otimes I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ dir.

Önermenin tersinin ispatı, her $(x, y) \in L_1 \times L_2$ elemanı, $(x, y) = (x, 1) \wedge (1, y)$ olarak yazılabildiğinden Önerme 2.4.1 ile açıktır.

Sonuç 2.4.1. $L = L_1 \times L_2$ çarpım kafesi üzerinde bir I gerektirmesi L_1 üzerinde bir gerektirmenin ve L_2 üzerinde bir gerektirmenin direkt çarpımıdır ⇔

Her $(x, y), (z, t) \in L$,

$$I\big((x, y), (z, t)\big) = I\big((x, 1), (z, 1)\big) \wedge I\big((1, y), (1, t)\big) \qquad (4)$$

ve $L_1 \times \{1\}$, $\{1\} \times L_2$, $L_1 \times L_2$ üzerinde I altında kapalıdır.

Uyarı 2.4.1. Eşitlik (4), $L_1 \times \{1\}$, $\{1\} \times L_2$ nin, $L_1 \times L_2$ üzerinde I altında kapalı olduğu anlamına gelmez. Örneğin; $L_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $0 < \frac{1}{2} < 1$ ve $L_2 = \{0,1\}$, $0 < 1$ olsun. I, $L_1 \times L_2$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$I\big((x,y),(z,t)\big) = \begin{cases} (1,1), & (x,y) = (0,0) \\ (1,t), & (x,y) = (0,1) \\ (z,1), & (x,y) = (1,0) \\ (z,t), & (x,y) = (1,1) \\ (0,0), & aksi\ taktirde \end{cases}$$

I nın $L_1 \times L_2$ üzerinde bir gerektirme olduğu ve (4) eşitliğini sağladığı gösterilebilir. $I\left(\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{2},1\right)\right) = (0,0)$ olduğundan, $L_1 \times \{1\}$, I altında kapalı değildir. I, L_2 üzerinde I_1 ve I_2 gerektirmelerinin direkt çarpımı olsun. O halde,

$$(0,0) = I\left(\left(\frac{1}{2},1\right),(0,1)\right) = \left(I_1\left(\frac{1}{2},0\right), I_2(1,1)\right) = \left(I_1\left(\frac{1}{2},0\right),1\right)$$

olduğu elde edilir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak I, L_1 üzerinde bir I_1 gerektirmesi, L_2 üzerinde bir I_2 gerektirmesinin direkt çarpımı olamaz.

Lemma 2.4.1. $L = L_1 \times L_2$, n bir güçlü negasyon, S bir t-conorm olmak üzere her $(x,y),(z,t) \in L = L_1 \times L_2$, $I_S\big((x,y),(z,t)\big) = S\big(n(x,y),(z,t)\big)$ S-gerektirmesi göz önüne alınsın. Eğer I_S (4) eşitliğini sağlar ise bu takdirde n, L_1 üzerinde n_1 güçlü negasyonunun ve L_2 üzerinde n_2 güçlü negasyonunun direkt çarpımıdır.

İspat: Teorem 2.2.1 den dolayı yalnızca $n(0,1) = (1,0)$ eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$n(0,1) = (t,k)$ ve $n(1,0) = (t^*,k^*)$ ve $I_S\big((0,1),(0,1)\big) = (c,d)$ olsun. (4) eşitliği ve $I_S\big((1,1),(1,0)\big) = (1,0)$ eşitliği kullanılarak

$$I_S\big((0,1),(0,0)\big) = I_S\big((0,1),(0,1)\big) \wedge I_S\big((1,1),(1,0)\big) = (c,d) \wedge (1,0) = (c,0)$$

elde edilir.

Diğer taraftan I_S nin tanımı gereği

$(c,0) = I_S\big((0,1),(0,0)\big) = S\big(n(0,1),(0,0)\big) = (t,k)$.

Böylece $k = 0$ ve $n(0,1) = (t,0)$. Benzer şekilde $n(1,0) = (0,k^*)$.

Teorem 2.1.1 den

$$(t,k^*) = (t,0) \vee (0,k^*) = n(0,1) \vee n(1,0) = n\big((0,1) \wedge (1,0)\big) = n(0,0) = (1,1).$$

Böylece $n(0,1) = (1,0)$ ve $n(1,0) = (0,1)$.

Lemma 2.4.2. L_1 ve L_2 iki tam kafes, $L_1 \times L_2$ çarpım kafesi üzerinde I_S bir S-gerektirmesi olsun. Eğer I_S, L_1 üzerinde $I_{S_1}(x,z) = S_1(n_1(x),z)$ S_1-gerektirmesinin ve L_2 üzerinde $I_{S_2}(y,t) = S_2(n_2(y),t)$ S_2-gerektirmesinin direkt çarpımı ise,

$S\big(n(x,1),(z,1)\big) = S\big((n_1(x),1),(z,1)\big)$ ve

$S\big(n(1,y),(1,t)\big) = S\Big(\big(1,n_2(y)\big),(1,t)\Big)$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned} S\big(n(x,1),(z,1)\big) &= I_S\big((x,1),(z,1)\big) = I_{S_1} \times I_{S_2}\big((x,1),(z,1)\big) = \Big(I_{S_1}(x,z), I_{S_2}(1,1)\Big) \\ &= \big(I_{S_1}(x,z),1\big). \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} S\big((n_1(x),1),(z,1)\big) &= S\big(n(x,0),(z,1)\big) = I_S\big((x,0),(z,1)\big) = I_{S_1} \times I_{S_2}\big((x,0),(z,1)\big) \\ &= \Big(I_{S_1}(x,z), I_{S_2}(0,1)\Big) = \big(I_{S_1}(x,z),1\big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\big(n(1,y),(1,t)\big) &= I_S\big((1,y),(1,t)\big) = I_{S_1} \times I_{S_2}\big((1,y),(1,t)\big) = \Big(I_{S_1}(1,1), I_{S_2}(y,t)\Big) \\ &= \Big(1, I_{S_2}(y,t)\Big). \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$S\big((1,n_2(y)),(1,t)\big) = S\big(n(0,y),(1,t)\big) = I_S\big((0,y),(1,t)\big) = I_{S_1} \times I_{S_2}\big((0,y),(1,t)\big)$$
$$= \Big(I_{S_1}(0,1), I_{S_2}(y,t)\Big) = \Big(1, I_{S_2}(y,t)\Big).$$

Teorem 2.4.1. L_1 ve L_2 iki tam kafes, $L_1 \times L_2$ çarpım kafesi üzerinde $I_S\big((x,y),(z,t)\big) = S\big(n(x,y),(z,t)\big)$ bir S-gerektirmesi olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

i. n L_1 üzerinde n_1 güçlü negasyonunun ve L_2 üzerinde n_2 güçlü negasyonunun direkt çarpımıdır ve S, L_1 üzerinde bir S_1 t-conorm ve L_2 üzerinde bir S_2 t-conormun direkt çarpımıdır.

ii. I_S, L_1 üzerinde I_{S_1} S_1-gerektirmesinin ve L_2 üzerinde I_{S_2} S_2-gerektirmesinin direkt çarpımıdır.

iii. I_S, $L_1 \times \{1\}$ üzerinde $I_S \downarrow (L_1 \times \{1\})$ $S \downarrow (L_1 \times \{1\})$-gerektirmesinin ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde $I_S \downarrow (\{1\} \times L_2)$ $S \downarrow (\{1\} \times L_2)$-gerektirmesinin iç direkt çarpımıdır.

İspat:

i $\Longrightarrow$ ii $n = n_1 \times n_2$ ve $S = S_1 \times S_2$ olsun. I_{S_1} ve I_{S_2} $I_{S_1}(x,z) := S_1(n_1(x),z)$ ve $I_{S_2}(y,t) := S_2(n_2(y),t)$ şeklinde tanımlansın.

$$I_S\big((x,y),(z,t)\big) = S\big(n(x,y),(z,t)\big) = S\Big(\big(n_1(x),n_2(y)\big),(z,t)\Big)$$

$$S_1 \times S_2\Big(\big(n_1(x),n_2(y)\big),(z,t)\Big) = \big(S_1(n_1(x),z), S_2(n_2(y),t)\big) =$$
$$\Big(I_{S_1}(x,z), I_{S_2}(y,t)\Big) = I_{S_1} \times I_{S_2}\big((x,y),(z,t)\big).$$

Böylece $I_S = I_{S_1} \times I_{S_2}$ elde edilir.

ii $\Rightarrow$ iii I_S L_1 üzerinde I_{S_1} S_1 gerektirmesinin ve L_2 üzerinde I_{S_2} S_2 gerektirmesinin direkt çarpımı olduğundan I_S (4) eşitliğini sağlar. Lemma 2.4.1 den, n L_1 üzerinde n_1 güçlü negasyonunun ve L_2 üzerinde n_2 güçlü negasyonunun direkt çarpımıdır.

$S \downarrow (L_1 \times \{1\})$ ve $S \downarrow (\{1\} \times L_2)$ t-conorm olduğunu göstermek için herhangi $x \in L_1$, $y \in L_2$ için $S\big((0,1),(x,1)\big) = (x,1)$ ve $S\big((1,0),(1,y)\big) = (1,y)$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. I_S nin tanımı, $n(0,1) = (1,0)$ ve (4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} S\big((0,1),(x,1)\big) &= I_S(n(0,1),(x,1)) = I_S\big((1,0),(x,1)\big) \\ &= I_S\big((1,1),(x,1)\big) \wedge I_S\big((1,0),(1,1)\big) = (x,1) \wedge S\big(n(1,0),(1,1)\big) \\ &= (x,1) \wedge (1,1) = (x,1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Keyfi $y \in L_2$ için $S\big((1,0),(1,y)\big) = (1,y)$ olduğu benzer şekilde gösterilir. Böylece $S \downarrow (L_1 \times \{1\})$ ve $S \downarrow (\{1\} \times L_2)$ sırasıyla $L_1 \times \{1\}$ ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde t-conormlardır.

Lemma 2.4.2 kullanılarak

$$I_S\big((x,1),(z,1)\big) = S\big(n(x,1),(z,1)\big) = S\big((n_1(x),1),(z,1)\big) = S\big(n_1^*(x,1),(z,1)\big)$$

ve

$$I_S\big((1,y),(1,t)\big) = S\big(n(1,y),(1,t)\big) = S\Big(\big(1,n_2(y)\big),(1,t)\Big) = S\big(n_2^*(1,y),(1,t)\big).$$

Burada, n_1^* ve n_2^* sırasıyla, $n_1^*(x,1) = (n_1(x),1)$ ve $n_2^*(1,y) = \big(1,n_2(y)\big)$ şeklinde verilen $L_1 \times \{1\}$ ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde güçlü negasyonlardır.

Bundan dolayı $I \downarrow (L_1 \times \{1\})$, $L_1 \times \{1\}$ üzerinde $S \downarrow (L_1 \times \{1\})$ gerektirmesidir ve $I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ $\{1\} \times L_2$ üzerinde $S \downarrow (\{1\} \times L_2)$ gerektirmesidir.

$(t_{1,}t_2) \in L$ için $I_S\Big(\big(x_{1,},x_{2,}\big),\big(y_{1,},y_{2,}\big)\Big) = (t_{1,}t_2)$ olsun.

$$\begin{aligned} (t_{1,}\, t_2) &= I_S\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \Big(I_{S_1}(x_1,y_1), I_{S_2}(x_2,y_2)\Big) \\ &= \big(I_{S_1}(x_1,y_1),1\big) \wedge \Big(1, I_{S_2}(x_2,y_2)\Big) \\ &= I_S\big((x_1,1),(y_1,1)\big) \wedge I_S\Big(\big(1,x_{2,}\big),(1,y_2)\Big). \end{aligned}$$

Sonuç olarak $I = I \downarrow (L_1 \times \{1\}) \otimes I \downarrow (\{1\} \times L_2)$ olduğu elde edilir.

iii $\Longrightarrow$ i Lemma 2.4.1 den n parçalanabilirdir. (4) eşitliğinden $I_S\big((n_1(x),1),(z,1)\big) = I_S\big((n_1(x),0),(z,1)\big)$ ve $I_S\Big(\big(1,n_2(y)\big),(1,t)\Big) = I_S\Big(\big(0,n_2(y)\big),(1,t)\Big)$ dir.

$$
\begin{aligned}
S\big((x,y),(z,t)\big) = I_S\big(n(x,y),(z,t)\big) = I_S\Big(\big(n_1(x),n_2(y)\big),(z,t)\Big) \\
&= I_S\big((n_1(x),1),(z,1)\big) \wedge I_S\Big(\big(1,n_2(y)\big),(1,t)\Big) \\
&= I_S\big((n_1(x),0),(z,1)\big) \wedge I_S\Big(\big(0,n_2(y)\big),(1,t)\Big) \\
&= I_S\big(n(x,1),(z,1)\big) \wedge I_S\big(n(1,y),(1,t)\big) \\
&= S\big((x,1),(z,1)\big) \wedge S\big((1,y),(1,t)\big).
\end{aligned}
$$

(3) eşitliği sağlandığından, S nin parçalanabilir olduğu elde edilir.

Sonuç 2.4.2. L_1 ve L_2 iki tam kafes ve $L = L_1 \times L_2$ çarpım kafesi üzerinde I_S bir S gerektirmesi olsun. I_S, L_1 üzerinde I_{S_1} S_1-gerektirmesinin ve L_2 üzerinde I_{S_2} S_2-gerektirmesinin direkt çarpımıdır $\Leftrightarrow$ Her $(x,y),(z,t) \in L$,

$$I_S\big((x,y),(z,t)\big) = I_S\big((x,1),(z,1)\big) \wedge I_S\big((1,y),(1,t)\big).$$

Uyarı 2.4.2. S gerektirmelerinin tanımı, $L_1 \times \{1\}$ ve $\{1\} \times L_2$ nin $L_1 \times L_2$ üzerinde tanımlı I_S altında kapalı olmasını gerektirir.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada, tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların iç direkt çarpımları konsepti karakterize edildi. Tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların iç ve dış direkt çarpımları arasındaki ilişki ortaya kondu. Bir güçlü negasyon yardımıyla, uni-nullnorm ve null-uninorm denen, uninorm ve nullnormların genelleştirilmesi olan, operatörlerin birbirinin duali (n-duali) olduğu gösterilerek *t*-norm-*t*-conorm dual çifti gibi uni-nullnorm-null-uninorm dual çifti elde edildi. *t*-conormların ve güçlü negasyonların direkt ayrıştırılabilirliği kullanılarak, *S*-gerektirme operatörlerinin direkt ayrıştırılabilirliği karakterize edildi.

4. ÖNERİLER

$[0,1]$ birim reel aralık üzerinde null-uninorm ve uni-nullnormlar yardımıyla tanımlanan n-duallik kavramının, sınırlı kafesler üzerinde nasıl tanımlanabileceği araştırılabilir. Ayrıca Teorem 2.4.1 ve Sonuç 2.4.2 de verilen, çarpım kafesleri üzerinde tanımlı olup direkt çarpım olmayan t-normların inşası için ortaya konan metodun çarpım kafesleri üzerinde tanımlı R-gerektirme ve QL-gerektirme operatörleri için geçerli olup olmayacağı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Akella, P., 2007. Structure of *n*-uninorms, Fuzzy Sets and Systems 158, 1631-1651.

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory, third ed., Providence.

Burris, S. and Sankappanavar, H.P., 1981. A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, New York.

De Baets, B. and Mesiar, R., 1999. Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104, 61-75.

Feng, S., Xue-ping, W. and Xiao-bing, Q., 2017. Uni-nullnorms and null-uninorms, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 32, 1969-1981.

Fodor, J.C., 1995. Contrapositive symmetry of fuzzy implications, Fuzzy Sets and Systems, 69, 141-156.

Karaçal, F. and Khadjiev, D., 2005. V-Distributive and infinitely V-distributive *t*-norms on complete lattices, Fuzzy Sets and Systems, 151, 341-352.

Karaçal, F., 2006. On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices. Information Sciences, 176, 3011-3025.

Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E., 2000. Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ma, Z. and Wu, W.M., 1991. Logical operators on complete lattices, Information Sciences, 55, 77-97.

Wang, Z. and Yu, Y., 2002. Pseudo-t-norms implication operators on a complete Brouwerian lattice, Fuzzy Sets and Systems 132, 113-124.

Weber, S., **1983.** A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems 11, 115-134.

Yager, R.R. and Rybalov, A., 1996. Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 80, 111-120.

ÖZGEÇMİŞ

Ece KÜRKÇÜ, 6 Haziran 1992 tarihinde Rize'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Rize'de tamamladı. 2009-2014 yıllarında Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü okudu. İki yıl özel kurumlarda öğretmenlik yaptı. 2 yıl önce başladığı Pazar Necat Sağbaş Anadolu Lisesi'ndeki görevi devam etmektedir. 2014 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Eğitimi üzerine başlayan tezli yüksek lisansı tez aşamasında devam etmektedir. 2016 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başlayan tezli yüksek lisans programındaki öğrenciliği halen devam etmektedir.

Bilimsel Çalışmaları ve Yayınları;

1- **Kürkçü, E., 2018.** MEB Örgün Eğitimi Destekleme ve Yetiştirme Kurslarının Matematik Dersi Bağlamında İncelenmesi. X. Internatıonal Congress of Educational research, Nevşehir, 27-30 Nisan.