T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK KÜMELER VE BULANIK ALT GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

ÖZKAN KÖSA

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. ÜMİT DENİZ
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. BAHADIR ÖZGÜR GÜLER
YRD. DOÇ. DR. MEHMET AKİF İNCE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2017

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK KÜMELER VE BULANIK ALT GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Yrd. Doç. Dr. Ümit DENİZ danışmanlığında, Özkan KÖSA tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 24/04/2017 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı ve Soyadı**	**İmzası**
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Ümit DENİZ	Ümit
Üye :	Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER	BÖGüler
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Mehmet Akif İNCE	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Bulanık Kümeler ve Bulanık Alt Grupların Cebirsel Yapısı” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 24/04/2017

Özkan KÖSA

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

BULANIK KÜMELER VE BULANIK ALT GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Özkan KÖSA

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ümit DENİZ

Bu çalışmada, soyut cebirin temel kavramları olan Alt Grup, Normal Alt Grup, Grup Homomorfizma konuları Fuzzy Cebirsel yapısına genişletilmiş, $[0,1]$ kapalı aralığında incelenmiş ve Fuzzy Alt Grup, Fuzzy Normal Alt Grup, Grup Homomorfizma konuları üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışma iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Soyut Cebirdeki temel tanım ve kavramlar incelenmiş, ikinci kısımda bu temel tanım ve kavramlar Fuzzy Cebir'e uyarlanmıştır.

2017, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Alt Küme, Fuzzy Alt Grup, Fuzzy Normal Alt Grup, Normal Alt Grup, Grup Homomorfizma

ABSTRACT

FUZZY SUBSETS AND THE ALGEBRAIC STRUCTURE OF FUZZY SUBGROUPS

Özkan KÖSA

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ümit DENİZ

In this work, basic concepts of abstract algebra such as subgroup, normal subgroup and group homomorphisms have been extended to fuzzy algebraic structure, examined on $[0,1]$ close interval and studied on This study consists of two part in first part basic concents and definitions in abstract algebra have been examined, in second part basic concents and definitions have been adapted to fuzzy algebra.

2017, 45 pages

Keywords: Fuzzy Subset, Fuzzy Subgroup, Fuzzy Normal Subgroup, Normal Subgroup, Group Homomorphism

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

μ, υ	Fuzzy Alt Küme
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
$\subseteq$	Alt Küme veya Eşit
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman Değil
$\geq$	Büyük veya Eşit
$\leq$	Küçük veya Eşit
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\circ$	Bileşke
μ_a	μ'nün Seviye(Kesit) Alt Kümesi
μ^*	μ'nün Destekleyicisi
1_Y	Y'nin Karakteristik Fonksiyonu
$f(\mu)$	μ'nün f Altındaki Görüntüsü
$[x, y]$	Komütatör
$\circ(\mu)$	μ'nün Mertebesi
$[0,1]^X$	X'in Fuzzy Kuvvet Kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Niteliği tam anlaşılamayan, iyi seçilmeyen, açık seçik görünmeyen, net olmayan şeklinde tanımlanan, dereceli üyelik kavramı yardımı ile teknik bilim dünyasına taşınmıştır. Bulanık (fuzzy) kümelerde dereceli üyelik kavramı ilk kez 1965 yılında Azeri kökenli Prof. Dr. Lütfü A. Zade (Lotfi Zadeh) (Zadeh L. A., 1965) vermiştir.

Bulanık mantık (fuzzy logic) genelde, insan düşüncesine özdeş işlemlerin gerçekleşmesini sağlamakla, gerçek dünyada sık sık meydana gelen belirsiz ve kesin olmayan verileri modellemede yardımcı olur.

Gerçek dünyada karşılaşılan nesnelerin sınıflarının üyelik dereceleri tam olarak tanımlanamaz. Örneğin hayvanlar sınıfını ele alalım. Açıkça bu kümenin köpekleri, atları vs. eleman olarak içerdiği, kayaları, sıvıları vs. içermediği bellidir. Bununla beraber denizyıldızı, bakteri gibi nesnelerin hayvanlar sınıfına olan yakınlığı belirsiz bir durumdur. Klasik mantıkta bir önerme "doğru" veya "yanlış" tır. Fakat gerçek dünyadaki olayların ne derecede doğru veya yanlış olmasının belirlenmesi gerekmektedir. Örneğin 100 C suyun sıcaklığı "sıcak" olarak ifade edilirse 95 C, 80 C lerdeki su için "sıcak değildir" ifadesi bu anlamda doğru olmadığı gibi yanlış da değildir. Bu nedenle önermelerin doğru (1) ve yanlış (0) değerleri arasındaki değerler (az sıcak, ılık, az soğuk, vs.) kullanılarak bulanık küme kavramı ortaya atılmıştır. Bulanık küme teorisi az, sık, orta, düşük, çok birçok gibi dilbilimsel yapıları kullanarak dereceli veri modellemesini gerçekleştirmektedir. Klasik küme, kümeye kesinlikle ait olma veya kesinlikle ait olmama biçiminde iki grubun oluşturulması ile anlamlıdır. Bulanık kavramı, kesin geçişleri elemine ederek belirsizlik kavramının tanımını yeniden verilebilir ve evrendeki bütün bireylere üyelik derecesi değerini atayarak matematiksel olarak tanımlanabilir. Bu derece, bulanık küme yardımıyla verilen kavram ile uyumludur ve benzer bir bireyin derecesine uyar. Böylece bireyler, bulanık küme içerisinde üyelik dereceleri tarafından gösterilen daha büyük ve daha küçük değerlere ait olabilirler. Bu üyelik dereceleri [0, 1] aralığında gerçel değerler ile ifade edilir.

Bu bölümdeki ilgili tanımlar (Çallıalp, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Tanım 1.1.1. $\boldsymbol{X} \neq \emptyset$ ve $\boldsymbol{Y} \neq \emptyset$ kümeleri verilsin. $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ kartezyen çarpımının alt kümelerinin her birine $\boldsymbol{X}$'ten $\boldsymbol{Y}$'ye bir bağıntı denir. Bir $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$elemanına bu kuralla $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$elemanı karşılık geliyorsa, söz konusu bağıntıya göre $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ elemanı $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ elemanıyla bağlantılıdır denir. O halde, $\boldsymbol{X}$'ten $\boldsymbol{Y}$'ye bir $\boldsymbol{\beta}$ bağıntısı verildiğinde

$$\beta \subseteq X \times Y = \{(x, y): x \in X \; ve \; y \in Y\}$$

ayrıca,

X'ten Y'ye bir bağıntının tanım kümesini ve görüntü kümesini, sırası ile TK_β ve GK_β şeklinde notasyonlarla gösterelim. Bu kümeler sırası ile

$$TK_\beta = \{x \in X : \ (x, y) \in \beta\}$$
$$GK_\beta = \{y \in Y : \ (x, y) \in \beta\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.2. X kümesinden Y kümesine bir $\beta \subseteq X \times Y$ bağıntısının ters bağıntısı β^{-1} şeklinde gösterilir ve Y'den X'e olan bu bağıntı da,

$$\beta^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : \ (x, y) \in R\}$$

şeklinde olur.

Tanım 1.1.3.

1. X kümesi üzerinde bir β bağıntısı $\forall x \in X$ için

$$(x, x) \in \beta$$

koşulunu sağlıyorsa, β'ya yansıyan bağıntı denir.

2. X kümesi üzerinde bir β bağıntısı $\forall x, y \in X$ için

$$(x, y) \in \beta \Rightarrow (y, x) \in \beta$$

koşulunu sağlıyorsa, β'ya simetrik bağıntı denir.

3. X kümesi üzerinde bir β bağıntısı $\forall x, y \in X$ için

$$\{(x, y) \in \beta \ \wedge (y, x) \in \beta\} \Rightarrow x = y$$

koşulunu sağlıyorsa, β'ya ters simetrik bağıntı denir.

4. X kümesi üzerinde bir β bağıntısı $\forall\ x, y, z \in X$ için

$$\{(x, y) \in \beta \ \wedge \ (y, z) \in \beta\} \Rightarrow (x, z) \in \beta$$

koşulunu sağlıyorsa, β'ya geçişken bağıntı denir.

Tanım 1.1.4. $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir β bağıntısı yansıma, simetri, geçişme özelliklerine sahipse, β'ye X üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 1.1.5. X kümesi üzerinde bir β bağıntısı verilsin ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, x'in denklik sınıfını $[x]$ veya $\bar{x}$ simgeleri ile gösterilir ve

$$\bar{x} = \{y \in Y :\ (x, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir X kümesi üzerinde bir β denklik bağıntısının tüm denklik sınıflarından oluşan kümeye denklik sınıfları kümesi veya X'in β'ye göre bölüm kümesi denir ve

$$X/\beta = \{\bar{x} : x \in X\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.6. $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir β bağıntısı; yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa, β'ye X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Bir X kümesinde tanımlanan bir R kısmi sıralama bağıntısı genellikle $\leq$ simgesi kullanılarak ifade edilir ve $(X, \leq)$ ikilisine de kısmi sıralı küme denir.

Tanım 1.1.7. $X \neq \emptyset$ kümesi üzerindeki bir β kısmi sıralama bağıntısı verilsin. Her $x, y \in X$ için $(x, y) \in \beta$ ya da $(y, x) \in \beta$ oluyorsa, β'ye X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı denir. Böyle durumda (X, β) ikilisine de tam sıralı küme denir.

Tanım 1.1.8. $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $Y \subset X$ olsun. Eğer $(Y, \leq)$ tam sıralı bir küme oluyor ise, Y alt kümesine X'in bir zinciri denir.

Tanım 1.1.9.

1. Her $x \in X$ için $x \leq M$ olacak şekilde bir $M \in X$ elemanı varsa M'ye X'in en büyük elemanı veya maksimumu denir ve $Mİ N(x)$ile gösterilir.

2. Her $x \in X$ için $m \leq x$ olacak şekilde bir $m \in X$ elemanı varsa m'ye X'in enküçük elemanı veya minimumu denir ve $MAX(x)$ ile gösterilir.

3. $M^* \in X$ olsun. X kümesinin M^*'dan kesinlikle daha büyük olan hiçbir elemanı yoksa; M^*'a, X'in maksimal elemanları adı verilir. X'in bu tür elemanlarının oluşturduğu kümeyi $max(x)$ ile göstereceğiz.

4. $m^* \in X$ olsun. X kümesinin m^*'dan kesinlikle daha küçük olan hiçbir elemanı yoksa; m^*'a, X'in minimal elemanları adı verilir. X'in bu tür elemanlarının oluşturduğu kümeyi $min(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.10. X kümesi üzerinde bir $\leq$ bağıntısı verilsin. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, verilen bağıntıya X üzerinde $\leq$ bağıntısına göre iyi sıralama bağıntısı ve $(X, \leq)$ kümesine de iyi sıralı küme veya iyi sıralanmış küme denir.

a) $\leq$ Bağıntısı X kümesi üzerinde bir kısmi sıralı bağıntıdır.

b) X'in boş kümeden farklı her alt kümesinin minimumu vardır.

Tanım 1.1.11. $(X, \leq)$ sıralı bir küme ve $Y \subseteq X$ olsun.

i. $\forall y \in Y$ için, $y \leq M$ olacak şekilde bir $M \in X$ varsa M'ye Y alt kümesinin bir üst sınırı denir.

ii. $\forall y \in Y$ için, $m \leq y$ olacak şekilde bir $m \in X$ varsa m'ye, Y alt kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 1.1.12. $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $Y \subset X$ olsun.

1. Y'nin üst sınırlar kümesinin en küçük elemanına, Y'nin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $sup(Y)$ ile gösterilir.

2. Y'nin alt sınırlar kümesinin en büyük elemanına, Y'nin en büyük alt sınırını veya infimumu denir ve $inf(Y)$ ile gösterilir.

1.2. Kafesler

Bu bölümdeki kafeslerle ilgili tanımlar (Çallıalp, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Tanım 1.2.1. $(\mathrm{S}, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

$\forall a, b \in S$ için, $\inf(a, b) = a \wedge b$
varsa $(\mathrm{S}, \leq, \wedge)$ sistemine bir yarı kafes denir.

Tanım 1.2.2. $(S, \leq)$ sıralı bir küme ve

$\forall a, b \in S$ için, $inf(a, b) = a \wedge b$ ve $sup(a, b) = a \vee b$
varsa $(S, \leq, \wedge, \vee)$ sistemine bir kafes denir.

Not 1. Bir kafeste $\forall a \in S$ için, $0 \leq a$ ve $a \leq 1$ olacak şekilde, yani tüm elemanlardan küçük ve tüm elemanlardan büyük 0 ve 1 ile göstereceğimiz iki eleman mevcut olsun.

Eğer $a \in S$ için, $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak şekilde bir a′ varsa, a′ ya a'nın tamlayanı denir.

Tanım 1.2.3. Tüm elemanlarının tamlayanı mevcut olan bir kafese tamlanmış kafes denir.

Tanım 1.2.4. Her a, b, c elemanı,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

dağılma özelliğini sağlayan kafese dağılmalı kafes denir.

Tanım 1.2.5. $(S, \leq)$ sıralı küme olsun. $\forall M \subseteq S$ için SupM ve İnfM mevcut ise S'ye tam kafes denir.

Tanım 1.2.6. $(S, \leq)$ kafes ve $\forall a, b, c \in S$, $a \leq b$ için

$$a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$$

ise S'ye modüler kafes denir.

1.3. Gruplar

Bu bölümdeki ilgili tanımlar (Çallıalp, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Tanım 1.3.1. G boş olmayan bir küme ve *, G de bir ikili işlem olsun.$(G,*)$ ikilisine bir tek işlemli cebirsel yapı denir.

Tanım 1.3.2. $(G,*)$ cebirsel yapının aşağıdaki özellikleri varsa bu cebirsel yapıya bir grup denir.

i. * işlemi birleşmelidir.

ii. G'nin * işlemine göre etkisiz(birim) elemanı vardır.

iii. G'deki her elemanın * işlemine göre tersi vardır.

Eğer $(G,*)$ cebirsel yapısı, yalnız i. Aksiyomu sağlıyorsa bir yarı gruptur denir.$(G,*)$ bir grup ve * işleminin değişme özelliği varsa bir değişmeli grup veya bir Abelian grup denir

Tanım 1.3.3. G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.$x^{-1}y^{-1}xy$ elemanına x ve y nin komütatörü denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

1.4. Alt Gruplar

Bu bölümdeki ilgili tanım ve teoremler (Çallıalp, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Tanım 1.4.1. G bir grup ve H, G'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G'deki işleme göre kendi başına bir grup ise H'ye, G'nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.1. G bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H'nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul

1. $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$ ve

2. $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$

veya

$\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ $(veya\ a^{-1}b \in H)$ olmasıdır.

1.5. Normal Alt Gruplar

Bu bölümdeki ilgili tanım ve teorem (Çallıalp, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Teorem 1.5.1. $N < G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1. $\forall a \in G, \forall x \in N$ için $axa^{-1} \in N$

2. $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$

3. $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$

4. $\forall a \in G$ için $aN = Na$

Tanım 1.5.1. Teorem 1.5.1 denk koşullarından birini sağlayan G'nin bir N alt grubuna normal alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

1.6. Grup Homomorfizma

Bu bölümdeki ilgili tanım ve teoremler (Çallıalp, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Tanım 1.6.1. $(G,\cdot)$ ve $(H,*)$ iki grup ve $f\colon G \to h$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(a.b) = f(a) * f(b)$ ise f'ye G'den H'ye bir homomorfizma denir.

Önerme 1.6.1. $f\colon G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i. $f(e_G) = e_H$

ii. $\forall a \in G$ için, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ dir.

Önerme 1.6.2. $f\colon G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i. G'nin her alt grubunun f altındaki görüntüsü, H'nin bir alt grubudur.

ii. H'nin her alt grubunun f altındaki ters görüntüsü G'nin bir alt grubudur.

Önerme 1.6.3. $f\colon G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i. f örten ise G'nin her normal alt grubunun f altındaki görüntüsü H'nin bir normal alt grubudur.

ii. H'nin her normal alt grubunun f altındaki ters görüntüsü G'nin bir normal alt grubudur.

Tanım 1.6.2. $f\colon G \to H$ bir homomorfizma ise

$$f^{-1}(e_H) = \{a \in G : f(a) = e_H\}$$

Kümesine *f* homomorfizmasının çekirdeği denir ve *Çekf* ile gösterilir.

Tanım 1.6.3. Örten, bire bir bir homomorfizmaya bir izomorfizma denir. Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ yazılır.

Teorem 1.6.1. (homomorfizma teoremi) $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizma olsun.

i. $Çekf = N \lhd G$

ii. $h \in H$ ve bir $a \in G$ için $f(a) = h$ ise $f^{-1}(h) = aN$ dir.

iii. $G\ /\ N \cong f(G)$ dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Fuzzy Alt küme

Bu bölümde ilgili tanımlar ve teoremler (Mordeson ve Malik, 1998)'dan faydalanılmıştır.

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu: X \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X'in fuzzy(Bulanık) alt kümesi denir. X'in bütün fuzzy alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X'in fuzzy(Bulanık) kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^X$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 2.1.2. $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\{\mu(x): x \in X\}$ ile tanımlanan kümeye μ'nün görüntü kümesi denir ve $\mu(X)$ ya da $Im(X)$ şeklinde gösterilir (Kaufmann, 1975).

Tanım 2.1.3. $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\mu^* = \{x: \mu(x) > 0\ , x \in X\}$ kümesine μ'nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ'ye de sonlu fuzzy(Bulanık) küme, μ^* sonsuz bir küme ise μ'ye de sonsuz fuzzy(Bulanık) küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(x)$ ise μ'ye X'in birimli fuzzy alt kümesi denir (Kaufmann, 1975).

Tanım 2.1.4. $Y \subset X$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_Y \in [0,1]^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a_Y = \begin{cases} a\ ; x \in Y \\ 0\ \ ; x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak; eğer $Y = \{x\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{x\}}$ şeklinde gösterilir ve $[0,1] - nokta$ veya $[0,1]\ singleton$ şeklinde isimlendirilir.

Eğer $a = 1$ ise

$$1_Y = \begin{cases} 1\ ; x \in Y \\ 0\ ; x \notin Y \end{cases}$$

fonksiyonuna Y'nin karakteristik fonksiyonu denir (Kaufmann, 1975).

Tanım 2.1.5. G bir grup ve $\forall \mu, v \in [0,1]^G$ fuzzy kümeleri olmak üzere $\forall x \in G$ için

$$(\mu \circ v)(x) = \bigvee \{\mu(y) \wedge v(z) : y, z \in G\ ,\ \ yz = x\}$$

dir.

$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ olarak μ fuzzy(Bulanık) kümesinin tersi tanımlanır.

Tanım 2.1.6. $\mu, v \in [0,1]^X$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq v(x)$ ise v fuzzy(Bulanık) kümesi, μ fuzzy kümesini kapsar denir ve $\mu \subseteq v$ şeklinde gösterilir (Kaufmann, 1975).

Tanım 2.1.7. $\mu, v \in [0,1]^X$ olmak üzere $\mu \cap v, \mu \cup v \in [0,1]^X$ kümeleri şu şekilde tanımlanır.

$$(\mu \cap v)(x) = \mu(x) \wedge v(x)$$

$$(\mu \cup v)(x) = \mu(x) \vee v(x)$$

Burada $\mu \cup v$ ve $\mu \cap v$'ye sırası ile bileşkesi ve arakesiti denir.

Tanım 2.1.7'de verilen iki fuzzy(Bulanık) fonksiyon arasındaki kesişim ve birleşim işlemleri her hangi bir fuzzy(Bulanık) fonksiyon ailesi için de şu şekilde genelleştirilir.

$J = \{\mu_i : i \in I\}$ şeklinde X'in fuzzy(Bulanık) alt küme ailesi olsun.$\forall x \in X$ için

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)$$

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\bigvee_{i\in I}\mu_i(x)$$

dir.

$I=\{1,2,3,\ldots,n\}$ ise

$$\bigcap_{i\in I}\mu_i=\bigcap_{i=1}^{n}\mu_i=\mu_1\cap\mu_2\cap\ldots\cap\mu_n$$

$$\bigcup_{i\in I}\mu_i=\bigcup_{i=1}^{n}\mu_i=\mu_1\cup\mu_2\cup\ldots\cup\mu_n$$

şeklinde ifade edilir (Kaufmann, 1975).

Tanım 2.1.8. $\mu\in[0,1]^X$ olmak üzere $a\in[0,1]$ için

$$\mu_a=\{x:\ x\in X,\qquad \mu(x)\geq a\}$$

kümesine μ'nün seviye(kesit) fuzzy(Bulanık) alt kümesi denir (Kaufmann, 1975).

Teorem 2.1.1. $\mu,v\in[0,1]^X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $\mu\subseteq v$, $a\in[0,1]$ ise $\mu_a\subseteq v_a$

b) $a\leq b$, $a,b\in[0,1]$ ise $\mu_b\subseteq\mu_a$

c) $\mu=v\Leftrightarrow\mu_a=v_a$, $\forall a\in[0,1]$

İspat 2.1.1.

a) $\mu\subseteq v$ olsun.

$\forall x\in X$ için $\mu(x)\leq v(x)$

$a \in [0,1]$ için $y \in \mu_a$ ise $a \leq \mu(y)$

Ayrıca $\mu_a \subseteq X$ ve $\mu \subseteq v$ olduğundan $\mu(y) \leq v(y)$

Dolayısıyla $a \leq \mu(y) \leq v(y)$ ve $a \leq v(y)$

$a \in v(y)$ ise $y \in v_a$'dir.

Yani $\mu_a \subseteq v_a$ elde edilir.

b) $a, b \in [0,1]$ olmak üzere $a \leq b$ olsun.

$x \in \mu_b$ olsun.

Bu takdirde $b \leq \mu(x)$ ve $a \leq b \leq \mu(x)$

$a \leq \mu(x)$ sonucu bulunur.

ve $x \in \mu_a$'dir.

Böylece $\mu_b \subseteq \mu_a$ elde edilir.

c) $\mu = v$ olsun.

$a \in [0,1]$ için $x \in \mu_a$ ise $\mu(x) \geq a$

$\mu = v$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\mu(x) = v(x)$

$\mu(x) = v(x) \geq a$ ise $x \in v_a$ 'dir.

ve $\mu_a \subseteq v_a$ elde edilir.

Benzer şekilde $v_a \subseteq \mu_a$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak $\mu_a = v_a$ elde edilir.

Bu kez $\forall a \in [0,1]$ için $\mu_a = v_a$ olsun.

$\forall x \in X$ İçin $\mu(x) = v(x) \geq a$ ve $\mu = v$ elde edilir.

Teorem 2.1.2. $\mu, v \in [0,1]^X$, $\forall a \in [0,1]$ için

i. $\mu_a \cup v_a = (\mu \cup v)_a$

ii. $\mu_a \cap v_a = (\mu \cap v)_a$

İspat 2.1.2.

i. $x \in \mu_a$ *veya* $x \in v_a$

$\mu(x) \geq a$ veya $v(x) \geq a$

$\mu(x) \vee v(x) \geq a$

$(\mu \cup v)(x) \geq a, x \in (\mu \cup v)_a$

$(\mu_a) \cup (v_a) \subseteq (\mu \cup v)_a$ (*)

$x \in (\mu \cup v)_a$ alalım

$(\mu \cup v)(x) \geq a$

$\mu(x) \vee v(x) \geq a$ tır.

$\mu(x) \geq a$ veya $v(x) \geq a$

$x \in \mu_a$ veya $x \in v_a$

$(\mu \cup v)_a \subseteq \mu_a \cup v_a$ (**)

(*) ve (**) den istenilen elde edilir.

ii. $x \in \mu_a \cap v_a$ olsun.

$x \in \mu_a$ ve $x \in v_a$ dır.

$\mu(x) \geq a$ ve $v(x) \geq a$ dır.

$\mu(x) \wedge v(x) \geq a$

$(\mu \cap v)(x) \geq a$

$x \in (\mu \cap v)_a$

$\mu_a \cap v_a \subseteq (\mu \cap v)_a$ (*)

$x \in (\mu \cap v)_a$ olsun.

$(\mu \cap v)(x) \geq a$ dır.

$\mu(x) \wedge v(x) \geq a$ dır.

$\mu(x) \geq a$ ve $v(x) \geq a$

$x \in \mu_a$ ve $x \in v_a$

$x \in \mu_a \cap v_a$

$(\mu \cap v)_a \subseteq \mu_a \cap v_a$ (**)

(*) ve (**) istenen elde edilir.

Teorem 2.1.3. $\{\mu_i : i \in I\} \subseteq [0,1]^X$ olmak üzere herhangi bir $a \in [0,1]$ için

a) $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$

b) $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a = (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$

İspat 2.1.3.

a. $x \in \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a$ $\exists i \in I$ için $x \in (\mu_i)_a$ tır.
$\mu_i \geq a$
$\bigvee_{i\in I}\mu_i \geq a$ tır.
$(\bigcup_{i\in I}\mu_i)(x) \geq a$
$x \in (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$
$\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$
den istenilen elde edilir.

b. $x \in \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a$ olsun.
$\forall i \in I$ için $x \in (\mu_i)_a$
$\forall i \in I$ için $(\mu_i)(x) \geq a$ tır.
$\bigwedge_{i\in I}\mu_i\,(x) \geq a$
$(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x) \geq a$
$x \in (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$
Yani $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$ (*)
$x \in (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$
$(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x) \geq a$
$\bigwedge_{i\in I}\mu_i\,(x) \geq a$ tır.
$\forall i \in I$ için $\mu_i(x) \geq a$ tır.
$\forall i \in I$ için $x \in (\mu_i)_a$ tır.
$x \in \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a$
$(\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a \subseteq \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a$ (**)

(*) ve (**) den istenilen elde edilir.

Teorem 2.1.4. $\mu \in [0,1]^X$ ve $\{a_i : i \in I\} \subset [0,1]$ olmak üzere $b = \bigwedge_{i\in I} a_i$, $c = \bigvee_{i\in I} a_i$ için

1. $\bigcup_{i\in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b$

2. $\bigcap_{i\in I} \mu_{a_i} = \mu_c$

İspat 2.1.4.

1. $x \in \bigcup_{i\in I} \mu_{a_i}$ olsun.
$a_t \leq \mu(x)$ olmak üzere en az bir $t \in I$ vardır.
$b = \bigwedge_{i\in I} a_i \leq a_t$ olduğuna göre
$b \leq a_t \leq \mu(x) \Rightarrow b \leq \mu(x) \Rightarrow x \in \mu_b \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b$

2. $x \in \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i}$ olsun.
$\forall i \in I$ için $a_i \leq \mu(x)$
$c = \bigvee_{i\in I} a_i$ için $c \leq \mu(x)$ elde edilir ve $x \in \mu_c$
ise $\bigcap_{i\in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_c$ (1)

$x \in \mu_c$ olsun.
$c = \bigvee_{i\in I} a_i$ olmak üzere $\forall i \in I$ için $\bigvee_{i\in I} a_i = c \leq \mu(x)$
ise $a_i \leq \mu(x)$, $(\forall i \in I)$ dolayısıyla $x \in \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i}$'dir.
Bu ise $\mu_c \subseteq \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i}$ (2)

(1) ve (2) den $\bigcap_{i\in I} \mu_{a_i} = \mu_c$ elde edilir.

Teorem 2.1.5. $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\mu = \bigcup_{a\in[0,1]} a_{\mu_a} = \bigcup_{a\in\mu(x)} a_{\mu_a}$'dir.

İspat 2.1.5.

$$\bigcup_{a\in[0,1]} a_{\mu_a}(x) = \bigvee_{a\in[0,1]} a_{\mu_a}(x) = \bigvee\{a \in [0,1] : a \leq \mu(x)\} = \mu(x)$$

$$\Rightarrow \mu = \bigcup_{a\in[0,1]} a_{\mu_a}$$

$$\bigcup_{a\in\mu(x)} a_{\mu_a}(x) = \bigvee_{a\in\mu(x)} a_{\mu_a} = \bigvee\{a \in \mu(x): a \leq \mu(x)\} = \mu(x)$$

$$\Rightarrow \mu = \bigcup_{a\in\mu(x)} a_{\mu_a}$$

Tanım 2.1.9. I boştan farklı indeks kümesi olmak üzere $\{X_i : i \in I\}$ boştan farklı kümelerin ailesi olsun.

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} : \ x_i \in X_i\,, i \in I\} \tag{12}$$

şeklinde kartezyen çarpım tanımlanır.

$\forall i \in I$ için $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\forall x = (x_i)_{i\in I} \in X$ için $\mu(x) = \bigwedge_{i\in I} \mu_i\,(x_i)$ şeklinde tanımlanmış $\mu \in [0,1]^X$ fuzzy(Bulanık) kümesine μ_i'lerin tam direkt çarpımı denir ve

$$\mu = \widetilde{\prod_{i\in I}} \mu_i$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$ ise

$$X = \prod_{i\in I} X_i = X_1 \times X_2 \times X_3 \ldots X_n$$

$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_3) : \ x_i \in X_i \ , \ i = 1,2,3, \dots, n\}$$

şeklindedir ve

$$\tilde{\prod_{i \in I}} \mu_i = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 \otimes \dots \otimes \mu_n$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\mu_i, v_i \in [0,1]^{X_i}$ ve $\forall i \in I$ için $\mu_i \subseteq v_i$ ise

$$\tilde{\prod_{i \in I}} \mu_i \subseteq \tilde{\prod_{i \in I}} v_i$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.1.10. X ve Y herhangi iki küme $\mu \in [0,1]^X$, $v \in [0,1]^Y$ ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f(\mu) \in [0,1]^Y$ ve $f^{-1}(v) \in [0,1]^X$ fuzzy(Bulanık) kümeler olmak üzere $\forall y \in Y$ için

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee \{\mu(x): x \in X, f(x) = y\}\,; & f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & ; \ f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}$$

$\forall x \in X$ için

$$f^{-1}(v)(x) = v\big(f(x)\big)$$

şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f'nin μ altındaki görüntüsü ve f'nin v altındaki ters görüntüsü denir.

Teorem 2.1.6. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ye birer fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdakiler doğrudur.

1. $\forall i \in I$, $\mu_i \in [0,1]^X$ için

$$f\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(\mu_i)$$

ve $\forall\, \mu_1,\mu_2 \in [0,1]^X$ için $\mu_1 \subseteq \mu_2$ ise $f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$ dir.

2. $\forall j \in J,\, v_j \in [0,1]^Y$ için

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}v_j\right)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(v_j)$$

ve

$$f^{-1}(\bigcap_{j\in J}v_j)=\bigcap_{j\in J}f^{-1}(v_j)$$

Ayrıca $\forall v_1, v_2 \in [0,1]^Y$ için $v_1 \subseteq v_2$ ise $f^{-1}(v_1) \subseteq f^{-1}(v_2)$.

3. $\forall\mu \in [0,1]^X$ için $f^{-1}\big(f(\mu)\big) \supseteq \mu$ eğer f bire bir ise $f^{-1}\big(f(\mu)\big)=\mu$.

4. $\forall v \in [0,1]^Y$ için $f\big(f^{-1}(v)\big) \subseteq v$ eğer f örten ise $f\big(f^{-1}(v)\big)=v$.

5. $\forall\mu \in [0,1]^X, \forall v \in [0,1]^Y$ için $f(\mu) \subseteq v \iff \mu \subseteq f^{-1}(v)$.

6. $\forall\mu \in [0,1]^X$ için $g\big(f(\mu)\big)=(gof)(\mu)$.

İspat 2.1.6.

1. $\forall y \in Y$ için

$$f\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(y)=\bigvee\left\{\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x) : x\in X, \qquad f(x)=y\right\}$$

$$= \bigvee \left\{ \bigvee_{i \in I} \mu_i(x) : x \in X, \qquad f(x) = y \right\}$$

$$= \bigvee \left\{ \bigvee \{\mu_i(x) : x \in X, \qquad f(x) = y\} \right\} = \bigvee_{i \in I} \big(f(\mu_i)(y)\big) = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i)\,(y)$$

$\forall \mu_1, \mu_2 \in [0,1]^X$ İçin $\mu_1 \subseteq \mu_2$ olsun. $\forall x \in X$ İçin $\mu_1(x) \subseteq \mu_2(x)$'dir.

$\forall y \in Y$ için

$$f(\mu_1)(y) = \bigvee \{\mu_1(x) : x \in X, \qquad f(x) = y\}$$

$$\leq \bigvee \{\mu_2(x) : x \in X, \qquad f(x) = y\}$$

$$= f(\mu_2)(y) \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$$

2. $\forall x \in X$ için

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} v_j\right)(x) = \left(\bigcup_{j \in J} v_j\right)\big(f(x)\big) = \bigvee_{j \in J} v_j\big(f(x)\big) = \bigvee_{j \in J} f^{-1}(v_j)\,(x)$$

$$= \left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(v_j)\right)(x)$$

$\forall x \in X$ için

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} v_j\right)(x) = \left(\bigcap_{j \in J} v_j\right)\big(f(x)\big) = \bigwedge_{j \in J} v_j\big(f(x)\big) = \bigwedge_{j \in J} f^{-1}(v_j)\,(x)$$

$$= \left(\bigcap_{j \in J} f^{-1}\left(v_j\right) \right)(x)$$

ve

$\forall\, v_1, v_2 \in [0,1]^Y$, $\forall y \in Y$ için $v_1 \subseteq v_2 \;\Rightarrow\; v_1(y) \le v_2(y)$'dir.

$y = f(x)$ olsun. $\forall\, x \in X$ için

$$f^{-1}(v_1)(x) = v_1\big(f(x)\big) \le v_2\big(f(x)\big) = f^{-1}(v_2)(x)$$
$$\Rightarrow f^{-1}(v_1)(x) \le f^{-1}(v_2)(x)$$
$$\Rightarrow f^{-1}(v_1) \subseteq f^{-1}(v_2)$$

3. $\forall \mu \in [0,1]^X$ ve $\forall x \in X$ için

$$f^{-1}\big(f(\mu)\big)(x) = f(\mu)\big(f(x)\big) = \bigvee \{\mu(x_1) :\; x_1 \in X\,, \quad f(x_1) = f(x)\} \ge \mu(x)$$

Eğer f, bire bir ise $\forall x_1, x \in X$ için $f(x_1) = f(x) \;\Rightarrow\; x_1 = x$ dir.

$$f^{-1}\big(f(\mu)\big)(x) = f(\mu)\big(f(x)\big) = \bigvee \{\mu(x_1) :\; x_1 \in X\,, f(x_1) = f(x)\} = \mu(x)$$

4. $\forall v \in [0,1]^Y$,$\forall y \in Y$ için

$$f\big(f^{-1}(v)\big)(y) = \bigvee \{f^{-1}(v)(x) : x \in X\,, \quad f(x) = y\}$$

$$= \bigvee \big\{v\big(f(x)\big) : x \in X\,, \quad f(x) = y\big\}$$

$$= \begin{cases} v(y) & ; \quad y \in f(X) \\ 0 & ; \quad y \notin f(X) \end{cases}$$

$$\leq v(y) \ \Rightarrow f\big(f^{-1}(v)\big) \subseteq v$$

eğer f örten ise $\forall y \in f(x)$'dir ve $f\big(f^{-1}(v)\big) = v$ dir.

5. $\forall \mu \in [0,1]^X$ **,** $\forall v \in [0,1]^Y$ olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall y \in f(X)$ için

$$f(\mu)(y) \leq v(y) \ \Leftrightarrow \ \bigvee\{\mu(x) : x \in X , \quad f(x) = y\} \leq v(y)$$

$$\Leftrightarrow \mu(x) \leq v\big(f(x)\big)$$
$$\Leftrightarrow \mu(x) \leq f^{-1}(v)(x)$$

6. $\forall z \in Z$, $\forall \mu \in [0,1]^X$ için

$$g\big(f(\mu)\big)(z) = \bigvee\{f(\mu)(y) : y \in Y , \quad g(y) = z\}$$

$$= \bigvee\Big\{\bigvee\{\mu(x) : x \in X , \quad f(x) = y\} : y \in Y , \quad g(y) = z\Big\}$$

$$= \bigvee\{\mu(x) : x \in X , \ g \circ f(x) = z\}$$

$$= (g \circ f)(\mu)(x)$$

2.2. Fuzzy Alt Gruplar

Bu bölümde ilgili tanım ve teoremler (Mordeson ve Malik, 1998)**'**dan faydalanılmıştır.

Tanım 2.2.1. G bir grup ve $\mu \in [0,1]^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa μ ye G'in fuzzy alt grubu denir.

(G1) $\forall x, y \in G$ için, $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(G2) $\forall x \in G$ için, $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

Tanım 2.2.2. G bir grup, μ, G'in fuzzy alt grubu ve e, G'in etkisiz elemanı olmak üzere

$$\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3. μ sonlu bir G grubunun fuzzy alt grubu olsun. Eğer μ_*, G'nin değişmeli alt grubu ise μ ye fuzzy değişmeli alt grup denir.

Teorem 2.2.1. G bir grup ve $\mu, v, \mu_i \in [0,1]^G$ $(i \in I), a = \vee\{\mu(x) : x \in G\}$ olsun.

1. $\forall x \in G$ için, $(\mu \circ v)(x) = \vee_{y \in G}\big(\mu(y) \wedge v(y^{-1}x)\big) = \vee_{y \in G}(\mu(xy^{-1}) \wedge v(y))$

2. $\forall x, y \in G$ için, $\big(a_y \circ \mu\big)(x) = \mu(y^{-1}x)$

3. $\forall x, y \in G$ için, $\big(\mu \circ a_y\big)(x) = \mu(xy^{-1})$

4. $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$

5. $\mu \subseteq v \Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq v^{-1}$

6. $(\cup_{i \in I} \mu_i)^{-1} = \cup_{i \in I} {\mu_i}^{-1}$

7. $(\cap_{i \in I} \mu_i)^{-1} = \cap_{i \in I} {\mu_i}^{-1}$

8. $(\mu \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ \mu^{-1}\, d$ir.

İspat 2.2.1.

1. $\forall x \in G$ için,

$$(\mu \circ v)(x) = \bigvee\{\mu(y) \wedge v(y^{-1}x) : y(y^{-1}x) = x\}$$

$$= \bigvee\{\mu(xy^{-1}) \wedge v(y) : (xy^{-1}) = x\}$$

2. $\forall x, y \in G$ için,

$$(a_y \circ \mu)(x) = \bigvee_{y \in G} \left(a_y(y) \wedge \mu(y^{-1}x)\right)$$

$$= \bigvee_{y \in G} \left(a \wedge \mu(y^{-1}x)\right)$$

$$= \bigvee_{y \in G} \left(\left(\bigvee\{\mu(x) : x \in G\}\right) \wedge \mu(y^{-1}x)\right)$$

$$= \mu(y^{-1}x)$$

3. $\forall x, y \in G$ için,

$$(\mu \circ a_y)(x) = \bigvee_{y \in G} \left(\mu(xy^{-1}) \wedge a_y(y)\right)$$

$$\bigvee_{y \in G} \left(\mu(xy^{-1}) \wedge \bigvee(\mu(x) \ : x \in X)\right)$$

$$= \mu(xy^{-1})$$

4. $\forall x \in G$ için,

$$(\mu^{-1})^{-1}(x) = \mu^{-1}(x^{-1}) = \mu((x^{-1})^{-1}) = \mu(x)$$

5. $\forall x \in G$ için,

$$\mu \subseteq v \iff \mu(x) \leq v(x) \iff \mu(x^{-1}) \leq v(x^{-1})$$
$$\iff \mu^{-1}(x) \leq v^{-1}(x)$$
$$\iff \mu^{-1} \subseteq v^{-1}$$

6. $\forall x \in G$ için,

$$\left(\bigcup_{i\in I} \mu_i\right)^{-1}(x) = \left(\bigcup_{i\in I} \mu_i\right)(x^{-1}) = \bigvee_{i\in I} \mu_i(x^{-1}) = \bigvee_{i\in I} \mu_i{}^{-1}(x)$$

$$= \left(\bigcup_{i\in I} (\mu_i)^{-1}\right)(x)$$

7. $\forall x \in G$ için,

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)^{-1}(x) = \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x^{-1})$$

$$= \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x^{-1}) = \bigwedge_{i\in I} \mu_i{}^{-1}(x) = \bigcap_{i\in I} \mu_i{}^{-1}(x)$$

8. $\forall\, x \in G$ için, $(\mu \circ v)^{-1}(x) = (\mu \circ v)(x^{-1})$

$$= \bigvee \{\mu(z^{-1}) \wedge v(y^{-1}) : \; y, z \in G, \qquad x^{-1} = z^{-1}y^{-1}\}$$

$$= \bigvee \{v^{-1}(y) \wedge \mu^{-1}(z) : y, z \in G, \qquad x = yz\}$$

$$= (v^{-1} \circ \mu^{-1})(x)$$

Teorem 2.2.2. G bir grup olsun. μ, G'in fuzzy alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall\, x\,, y \in G$ için

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

olmasıdır.

İspat 2.2.2. μ, G'in bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

dir.

Bu kez $\forall x, y \in G$ için, $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu(xy) = \mu(xyyy^{-1}) &\geq \mu(x) \wedge \mu(yy^{-1}y^{-1}) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(yy^{-1}) \wedge \mu(y) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(y) \wedge \mu(y) \\ &= \mu(x) \wedge \mu(y)\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\mu(x^{-1}) &= \mu(x^{-1}xx^{-1}) \geq \mu(x^{-1}x) \wedge \mu(x) \\ &= \mu(xx^{-1}) \wedge \mu(x) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) \wedge \mu(x) \\ &= \mu(x)\end{aligned}$$

Sonuç olarak μ, G grubunun fuzzy alt grubu olduğu elde edilir.

Teorem 2.2.3. G bir grup ve μ, Ggrubunun fuzzy alt grubu olsun. $\forall x \in G$ için,

1. $\mu(e) \geq \mu(x)$

2. $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ dir.

İspat 2.2.3.

1. $\forall x \in G$ için,

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$$

2. $\forall x \in G$ için,

$$\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

Teorem 2.2.4. G sonlu bir grup olmak üzere eğer $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ise μ, G grubunun fuzzy alt grubudur.

İspat 2.2.4.

$x = e$ *olsun.*
$\mu(e^{-1}) = \mu(e)$ sağlar.
$x \neq e$ olsun.
$x^r = x^s$ olacak şekilde $r \geq s \geq 0$ $r, s \in Z^+$ mevcuttur.
$x^{r-s} = e$ dir. $r - s - 1 \geq 0$ olur.
$x^{-1} = x^{r-s-1} \in G$ dir.
$\mu(x^{-1}) = \mu(x^{r-s-1}) \geq \mu(x)$ elde edilir.

Teorem 2.2.5. G bir grup ve μ, G grubunun fuzzy alt grubu olsun. $\forall x, y \in X$ için, $\mu(xy) = \mu(y)$ olması için gerek ve yeter koşul μ(x)=μ(e) olmasıdır.

İspat 2.2.5. $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olsun. $y = e$ olarak alınırsa $\mu(x) = \mu(e)$ elde edilir. Bu sefer $\forall x, y \in G$ için $\mu(x) = \mu(e)$ olsun. Şu halde $\mu(x) \geq \mu(y)$ olup
$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ den $\mu(xy) \geq \mu(y)$ (1)

$$\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(xy)$$

dir.

μ(x)=μ(e) olduğundan $\mu(y) \geq \mu(xy)$ (2)

(1) ve (2) den $\mu(xy) = \mu(y)$ elde edilir.

Teorem 2.2.6. G bir grup ve μ, G grubunun fuzzy alt grubu olsun.

$\forall x, y \in G$ için, $\mu(x) < \mu(y)$ ise

$$\mu(xy) = \mu(yx) = \mu(x)$$

dir.

İspat 2.2.6. $\forall x, y \in G$ için, $\mu(x) < \mu(y)$ olsun.

$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(x)$ ve $\mu(xy) \geq \mu(x)$ olur.
$\mu(x) = \mu(xyy^{-1}) \geq \mu(xy) \wedge \mu(y)$ den $\mu(xy) \leq \mu(x)$ olur.
Sonuç olarak $\mu(xy) = \mu(x)$ elde edilir

$\forall x, y \in G$ için $\mu(x) < \mu(y)$ olsun.
$\mu(yx) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(x)$ ve $\mu(yx) \geq \mu(x)$ olur.
$\mu(x) = \mu(y^{-1}yx) \geq \mu(y) \wedge \mu(yx)$ den $\mu(yx) \leq \mu(x)$ olur.

Sonuç olarak $\mu(yx) = \mu(x)$ elde edilir.

Teorem 2.2.7. G bir grup ve μ, G grubunun fuzzy alt kümesi olsun. μ, G'nin fuzzy alt grubu ise $\forall\, a \in [0, \mu(e)]$ için μ_a kümesi G nin bir alt grubudur.

İspat 2.2.7. $\forall x \in G$ için $\mu(e) \geq a$ dır ve $e \in \mu_a$ olur. Dolayısıyla $\mu_a \neq \emptyset$ dır.
$\forall x, y \in \mu_a$ için $\mu(x) \geq a, \mu(y) \geq a$'dır. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = a \wedge a = a$ olduğundan $xy \in \mu_a$ dır.

$\forall x \in \mu_a$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \geq a$ olduğundan $\mu(x^{-1}) \geq a$ ve $x^{-1} \in \mu_a$ dır.

Sonuç olarak μ_a , G'nin alt grubu olduğu gösterilir.

Teorem 2.2.8. G bir grup ve μ, G grubunun fuzzy alt kümesi olsun. $\forall a \in Im(\mu)$ için μ_a, G'nin alt grubu ise μ, G grubunun fuzzy alt grubudur.

İspat 2.2.8. $x, y \in G$ için

$\mu(x) \geq a \quad \mu(y) \geq b$ olsun.

$a \leq b$ veya $b \leq a$ dır.

$a \leq b$ alalım.

$\mu(x) \wedge \mu(y) = a \wedge b = a$ olur.

$a \leq b \Rightarrow \mu_b \subseteq \mu_a$ dir.

$y \in \mu_a$ olur.

$x \in \mu_a$ dır.

$x^{-1} \in \mu_a$ dır.

μ_a alt grup olduğundan

$xy^{-1} \in \mu_a$ olur.

$\mu(xy^{-1}) \geq a$

$\mu(xy^{-1}) \geq a = a \wedge b$

$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

Teorem 2.2.9. G bir grup ve μ, G grubunun fuzzy alt grubu ise μ_* , G'nin alt grubudur.

İspat 2.2.9. $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$

$x = e$ için $\mu(x) = \mu(e)$, $e \in \mu_*$ ve $\mu_* \neq \emptyset$

$\forall x, y \in \mu_*$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(e) \wedge \mu(e) = \mu(e)$

ve $xy \in \mu_*$

$\forall x \in \mu_*$ için $\mu(x^{-1}) = \mu(x) = \mu(e)$ ve $x^{-1} \in \mu_*$'dir.

Böylece μ_*, G grubunun alt grubudur.

Teorem 2.2.10. G bir grup ve μ, G grubunun fuzzy alt grubu ise μ^* , G'nin alt grubudur.

İspat 2.2.10. $\mu^* = \{x : \mu(x) > 0 , x \in G\}$ dir. $\mu(e) > 0$ ve $e \in \mu^*$ olduğundan $\mu^* \neq \emptyset$ dır.

$\forall x, y \in \mu^*$ için $\mu(x) > 0 , \mu(y) > 0$ ise $\mu(x) \wedge \mu(y) > 0$'dır
$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) > 0$ ve $xy^{-1} \in \mu^*$ elde edilir. Böylece μ^* , G grubunun alt grubudur.

Teorem 2.2.11. G bir grup olsun. μ fuzzy alt kümesinin, G grubunun fuzzy alt grubu olması için gerek ve yeter şart

1. $\mu \circ \mu \subseteq \mu$

2. $\mu = \mu^{-1}$

İspat 2.2.11. μ, G grubunun fuzzy alt grubu olsun.

$\forall x \in G$ için

$(\mu \circ \mu)(x) = \vee \{\mu(y) \wedge \mu(z): y, z \in G , x = yz\} = \mu(t)$

$x = tk \;\; t, k \in G$ olduğuna göre

$\mu(x) = \mu(tk) \geq \mu(t) \wedge \mu(k) = \mu(t)$

elde edilir.

Sonuç olarak $(\mu \circ \mu)(x) \leq \mu(x)$ ve $\mu \circ \mu \subseteq \mu$ bulunur.

$\forall x \in G$ için $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1}) = \mu(x)$ olduğundan $\mu = \mu^{-1}$ elde edilir.

Bu kez $\mu \circ \mu \subseteq \mu$ ve $\mu = \mu^{-1}$ olsun.

$\forall x, y, z \in G$ için $z = xy$ olsun

$\mu(xy) = \mu(z) \geq (\mu \circ \mu)(z) = \bigvee\{\mu(x) \wedge \mu(y): x, y \in G, z = xy\} \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

$\forall x \in G$ için $\mu(x) = \mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ dir.

O halde μ, G grubunun fuzzy alt grubudur.

Teorem 2.2.12. G bir grup ve μ, v, G grubunun fuzzy alt grupları olmak üzere $\mu \circ v$, G grubunun fuzzy alt grubu olması için gerek ve yeter şart $\mu \circ v = v \circ \mu$ olmasıdır.

İspat 2.2.12. $\mu \circ v$, G grubunun fuzzy alt grubu olsun. Teorem 2.2.11 (2)'den $\mu = \mu^{-1}$ ve $v = v^{-1}$ dir. Dolayısıyla $\mu \circ v = \mu^{-1} \circ v^{-1} = (v \circ \mu)^{-1} = v \circ \mu$ elde edilir.

Tersine $\mu \circ v = v \circ \mu$ olsun.

$$(\mu \circ v) \circ (\mu \circ v) = \mu \circ (v \circ \mu) \circ v$$
$$= \mu \circ (\mu \circ v) \circ v = \mu \circ v$$
$$(\mu \circ v)^{-1} = (v \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ v^{-1} = \mu \circ v$$

Sonuç olarak Teorem 2.2.11'den $\mu \circ v$, G'nin fuzzy alt grubudur

Teorem 2.2.13. G bir grup ve $\forall i \in I$ için μ_i, G'nin fuzzy alt grupları olmak üzere $\bigcap_{i \in I} \mu_i$, G'nin fuzzy alt grubudur.

İspat 2.2.13. $\forall x, y \in G$ için

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(xy^{-1}) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(xy^{-1}) \geq \bigwedge_{i \in I} (\mu_i(x) \wedge \mu_i(y))$$

$$= \left(\bigwedge_{i\in I} \mu_i(x)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i\in I} \mu_i(y)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x) \wedge \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(y)$$

Sonuç olarak $\bigcap_{i\in I} \mu_i$, G'nin fuzzy alt grubudur.

Teorem 2.2.14. $f: G \to H$ grup izomorfizması olsun. $\mu : G \to [0,1]$ fuzzy alt grup $v : H \to [0,1]$ fuzzy alt grup olsun. *f(μ)*, H'nin fuzzy alt grubudur.

İspat 2.2.14. $\forall u, v \in H$ için $f(x) = u$, $f(y) = v$ olacak şekilde $\exists x, y \in G$.

$$\big(f(\mu)\big)(uv) = \bigvee \{\mu(z) : z \in G \,, f(z) = uv\}$$

$$\big(f(\mu)\big)(uv) = \bigvee \{\mu(z) : z \in G \,, f(z) = f(x).f(y)\}$$

$$= \bigvee \{\mu(z) : z \in G \,, f(z) = f(xy)\}$$

$$= \bigvee \{\mu(z) : z \in G \,, z = x.y\}$$

$$\geq \bigvee \{\mu(xy) : x, y \in G \,, f(x) = u \,, f(y) = v\}$$

$$\geq \bigvee \{\mu(x) \wedge \mu(y) : x, y \in G \,, f(x) = u \,, f(y) = v\}$$

$$= \left(\bigvee \{\mu(x) : x \in G \,, f(x) = u\}\right) \wedge \left(\bigvee \{\mu(y) : y \in G \,, f(y) = v\}\right)$$

$$= \big(f(\mu)\big)(u) \wedge \big(f(\mu)\big)(v)$$

$$\big(f(\mu)\big)(u^{-1}) = \bigvee\{\mu(x^{-1}) : x \in G\ , f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = u^{-1}\}$$

$$\geq \bigvee\{\mu(x) : x \in G\ , f(x) = u\}$$

$$= \big(f(\mu)\big)(u)$$

Sonuç olarak *f(μ)*, *H* grubunun fuzzy alt grubudur.

Teorem 2.2.15. $f: G \to H$ grup izomorfizması ve v, H'nin fuzzy alt grubu olsun. $f^{-1}(v)$, G'nin fuzzy alt grubudur.

İspat 2.2.15. $\forall x, y \in G$ için,

$$f^{-1}(v)(xy) = v\big(f(xy)\big) = v\big(f(x)f(y)\big) \geq v\big(f(x)\big) \wedge v\big(f(y)\big)$$

$$= f^{-1}(v)(x) \wedge f^{-1}(v)(y)$$

$$f^{-1}(v)(x^{-1}) = v\big(f(x^{-1})\big) = v((f(x)^{-1}) \geq v\big(f(x)\big) = f^{-1}(v)(x)$$

sonuç olarak $f^{-1}(v)$, G'nin fuzzy alt grubudur.

Örnekler

1. Z tam sayılar kümesi $+$ işlemine göre bir gruptur $\mu: Z \to [0,1]$'e $\forall x \in Z$ için $\mu(x) = \frac{1}{2}$ olarak tanımlanan μ fuzzy kümesi Z tam sayılar kümesinin fuzzy alt grubudur.

2. $\mu: Z \to [0,1]$'e $\forall x \in Z$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & ; x \in 3Z \\ 0 & ; x \in Z - 3Z \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ fuzzy kümesi Z tam sayılar kümesinin fuzzy alt grubudur.

3. G, Klein 4'lü grup $G = \{e, a, b, ab\}$ ve $a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$ iken

$$\mu(e) = 1\ , \mu(a) = \mu(b) = t\ (0 < t < 1), \mu(ab) = 1$$

olsun. Şu halde μ, G grubunun fuzzy alt grubudur.

2.3. Fuzzy Normal Alt Gruplar

Bu bölümde ilgili tanım ve teoremler (Mordeson ve Malik, 1998)**'**dan faydalanılmıştır.

Teorem 2.3.1. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy alt grubu olmak üzere $\forall x, y \in G$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1. $\mu(xy) = \mu(yx)$

2. $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$

3. $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$

4. $\mu(\mathrm{xy}x^{-1}) \leq \mu(y)$

İspat 2.3.1.

(1)⇒(2) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xyx^{-1}) = \mu(xy.x^{-1}) = \mu(x^{-1}.xy) = \mu(y)$ elde edilir.

(2)⇒(3) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$ olduğundan $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$ dir.

(3)⇒(4) $\forall x, y \in G$ için
$\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(x^{-1}.xyx^{-1}.(x^{-1})^{-1}) = \mu(x^{-1}.xyx^{-1}.x) = \mu(y)$

(4)⇒(1) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(xyxx^{-1}) = \mu(x.yx.x^{-1}) \leq \mu(yx)$ (*)

$\mu(yx) = \mu(yxyy^{-1}) = \mu(y.xy.y^{-1}) \leq \mu(xy)$ (**)

Sonuç olarak (*) ve (**) dan $\mu(xy) = \mu(yx)$ olduğu elde edilir.

Tanım 2.3.1. Bu şartlardan en az biri sağlanırsa G fuzzy alt grubuna fuzzy normal alt gruptur denir.

Teorem 2.3.2. G bir ve μ, G'nin fuzzy alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ olması için gerek ve yeter koşul v, G'nin fuzzy alt grubu olmak üzere $\mu \circ v = v \circ \mu$ olmasıdır.

İspat 2.3.2. ⇒: $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ olsun.

$$(\mu \circ v)(x) = \bigvee \{\mu(xy^{-1}) \wedge v(y) : y \in G\}$$

$$= \bigvee \{\mu(xy^{-1}) \wedge v(y) : y \in G\}$$

$$= (v \circ \mu)(x)$$

Buradan $\mu \circ v = v \circ \mu$ elde edilir.

⇐: $\mu \circ v = v \circ \mu$ olsun. $\forall x, y \in G$ için $1_{\{y^{-1}\}} \circ \mu = \mu \circ 1_{\{y^{-1}\}}$ ve

$$\left(1_{\{y^{-1}\}} \circ \mu\right)(x) = \vee \left\{1_{\{y^{-1}\}}(y^{-1}) \wedge \mu(yx) : y \in G\right\} = \mu(xy) \quad (*)$$

$$\left(\mu \circ 1_{\{y^{-1}\}}\right)(x) = \vee \left\{\mu(xy) \wedge 1_{\{y^{-1}\}}(y^{-1}) : y \in G\right\} = \mu(yx) \quad (**)$$

Sonuç olarak (*) ve (**) den $\mu(xy) = \mu(yx)$ elde edilir.

Teorem 2.3.3. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy normal alt grubu olmak üzere μ_* ve μ^* kümeleri G'nin normal alt grubudur.

İspat 2.3.3. $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$, G'nin alt grubudur. $\forall y \in \mu_*$ için $\mu(y) = \mu(e)$ dir. $\forall x \in G$ için $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) = \mu(e)$ dir ve $xyx^{-1} \in \mu_*$ dır.
Sonuç olarak μ_*, G'nin normal alt grubudur.

$\mu^* = \{x : \mu(x) > 0 , x \in G\}$, G'nin bir alt grubudur. $\forall y \in \mu^*$ için $\mu(y) > 0$ dır.
$\forall x \in G$ için $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) > 0$ dır ve $xyx^{-1} \in \mu^*$ dır.

Sonuç olarak μ^*, G'nin normal alt grubudur.

Teorem 2.3.4. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy alt grubu olsun.

$$N(\mu) = \{x : x \in G , \mu(xy) = \mu(yx) , \forall y \in G\}$$

kümesi G'nin bir alt grubudur.

İspat 2.3.4. G grup olduğundan $\forall x \in G$ için $\mu(ex) = \mu(x) = \mu(xe)$ ve $e \in N(\mu) \neq \emptyset$ dir.

$\forall a, b \in N(\mu)$ ve $\forall x \in G$ için

$$\mu(abx) = \mu(a.bx) = \mu(b.xa) = \mu(xa.b) = \mu(xab)$$

ve $ab \in N(\mu)$ elde edilir. (*)

$\forall\, y \in N(\mu)$ ve $\forall z \in G$ için

$$\mu(y^{-1}z) = \mu((z^{-1}y)^{-1}) = \mu(z^{-1}y) = \mu(yz^{-1}) = \mu((zy^{1})^{-1}) = \mu(zy^{-1})$$
ve $y^{-1} \in N(\mu)$ elde edilir. (**)

(*) ve (**) dan N(μ), G'nin bir alt grubudur.

Teorem 2.3.5. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy alt grubu olsun. μ, G grubununun fuzzy normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ olmak üzere
$\mu([x,y]) = \mu(e)$ olmasıdır.

İspat 2.3.5. ⇒: μ, G'nin fuzzy normal alt grubu olsun.

$\forall x, y \in G$ için $\mu(x^{-1}y^{-1}x) = \mu(y^{-1})$
$\mu(x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}) = \mu(y^{-1}) \;\Rightarrow\; \mu([x,y]y^{-1}) = \mu(y^{-1})$.
$\mu(x) = \mu(e)$ olduğundan $\mu([x,y]) = \mu(e)$ elde edilir.

⇐: $\forall x, y \in G$ için $\mu([x,y]) = \mu(e)$ olsun.

$$\begin{aligned} &\mu([x,y]y^{-1}x^{-1}) = \mu(y^{-1}x^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu(x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}x^{-1}) = \mu(x^{-1}y^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu(x^{-1}y^{-1}) = \mu(y^{-1}x^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu((y,x)^{-1}) = \mu((x,y)^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu(yx) = \mu(xy) \end{aligned}$$

Böylelikle μ, G grubunun fuzzy normal alt grubu olur.

Teorem 2.3.6. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy alt grubu olsun. μ, G grubunun fuzzy normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ olmak üzere
$\mu([x,y]) \geq \mu(x)$ olmasıdır.

İspat 2.3.6. μ, G grubunun fuzzy normal alt grubu olsun.
$\forall\, x, y \in G$ olmak üzere

$$\mu([x,y]) = \mu(x^{-1}y^{-1}xy) \geq \mu(x^{-1}) \wedge \mu(y^{-1}xy) \;\geq \mu(x) \wedge \mu(x) \; = \mu(x)$$
elde edilir.

$\forall x, y \in G$ için $\mu([x,y]) \geq \mu(x)$ olsun.

$$\mu(y^{-1}xy) = \mu(xx^{-1}y^{-1}xy) = \mu(x[x,y]) \geq \mu(x) \wedge \mu([x,y])$$
$$\geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$$

elde edilir ve μ, G grubunun fuzzy normal alt grubu olur.

Tanım 2.3.2. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy alt grubu ve $x \in G$ olsun. $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu$ ye μ'nin x'e göre fuzzy sol koseti denir ve $x\mu$ ile gösterilir.$\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}$ ye μ nin x'e göre fuzzy sağ koseti denir ve μx ile gösterilir. Eğer μ, G'nin fuzzy normal alt grubu ise $x\mu = \mu x$ dir.

Teorem 2.3.9. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için

1. $x\mu = y\mu \Leftrightarrow x\mu_* = y\mu_*$

2. $\mu x = \mu y \Leftrightarrow \mu_* x = \mu_* y$ dir.

İspat 2.3.9. $x\mu = y\mu$ olsun.

O takdirde $\forall z \in G$ için $\mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z)$ dir.
$z = y$ olarak alınırsa $\mu(x^{-1}y) = \mu(y^{-1}y) = \mu(e)$ ve $x^{-1}y \in \mu_*$ dir.

Sonuç olarak $x\mu_* = y\mu_*$ elde edilir.

Bu kez $x\mu_* = y\mu_*$ olsun.

Şu halde $x^{-1}y \in \mu_*$ ve $y^{-1}x \in \mu_*$'dır.

$\forall\, z \in G$ için

$$\mu(x^{-1}z) = \mu(x^{-1}yy^{-1}z) \geq \mu(x^{-1}y) \wedge \mu(y^{-1}z)$$
$$= \mu(e) \wedge \mu(y^{-1}z)$$
$$= \mu(y^{-1}z)$$

elde edilir.

$\forall z \in G$ için

$$\mu(y^{-1}z) = \mu(y^{-1}xx^{-1}z) \geq \mu(y^{-1}x) \wedge \mu(x^{-1}z)$$
$$= \mu(e) \wedge \mu(x^{-1}z)$$
$$= \mu(x^{-1}z)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z)$ ve $x\mu = y\mu$ elde edilir. 2 de benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.3.10. G bir grup ve μ, G'nin fuzzy normal alt grubu olsun. Eğer $x, y \in G$ için $x\mu = y\mu$ ise $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

İspat 2.3.10. $x\mu = y\mu$ olsun. $x^{-1}y \in \mu_*$ ve $y^{-1}x \in \mu_*$'dır.

$$\mu(x) = \mu(yy^{-1}x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y^{-1}x) = \mu(y) \wedge \mu(e) = \mu(y) \qquad (*)$$

$$\mu(y) = \mu(xx^{-1}y) \geq \mu(x) \wedge \mu(e) = \mu(x) \wedge \mu(e) = \mu(x) \qquad (**)$$

(*) ve (**) dan $\mu(x) = \mu(y)$ elde edilir.

Teorem 2.3.11. $f: G \to H$ grup izomorfizması ve μ, G'nin fuzzy normal alt grubu ve H'de bir grup olsun. $f(\mu)$, G grubunun fuzzy normal alt grubudur.

İspat 2.3.11. $\forall u, v \in H$ için

$f(x) = u$ ve $f(y) = v$, $\exists x, y \in G$.

$$f(\mu)(uvu^{-1}) = \bigvee\{\mu(z), z \in G, f(z) = uvu^{-1}\}$$

$$= \bigvee\{\mu(xyx^{-1}), f(z) = uvu^{-1}\}$$

$$\geq \bigvee \{\mu(y), f(y) = v\}$$

$$= f(\mu)(y)$$

Teorem 2.3.12. $f: G \to H$ grup izomorfizması ve v, H'nin normal alt grubu olsun Buradan $f^{-1}(v)$, G'nin fuzzy normal alt grubudur.

İspat 2.3.13. $f^{-1}(v)$, H'nin fuzzy alt grubudur.

$\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(v)(xy) &= v\big(f(xy)\big) = v\big(f(x)f(y)\big) \\ &= v\big(f(y)f(x)\big) = v\big(f(yx)\big) \\ &= f^{-1}(v)(yx) \end{aligned}$$

$f^{-1}(v)$, G'nin normal fuzzy alt grubudur.

3. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Lütfi Zadeh'in 1965 yılında vermiş olduğu fuzzy alt küme tanımından sonra klasik cebirdeki küme kavramı, fuzzy alt küme tanımı ile bir çok matematikçi tarafından fuzzy cebire uygulamaya çalışılmıştır. Klasik cebirde ki tanım ve teoremlere paralel fuzzy alt küme tanımı kullanılarak bu tanımları doğrulayacak teorem ve örnekler incelenmiştir. Bizde kendi çalışmamızda fuzzy alt grup ve fuzzy normal alt grup tanımlarını verdik ve bu tanımlarla klasik cebirde örtüşen teoremler ve örnekler yaptık.

4. ÖNERİLER

Klasik Cebirdeki birçok tanım fuzzy cebire aktarılmaktadır. Bu çalışmaların bir standardı olmadığı için birçok farklı tanım verilebilmektedir. Bu anlamda fuzzy cebirin bir sonu yoktur. Verilebilecek tanımlar ve teoremlerle fuzzy cebir çok geniş olarak incelenebilir.

KAYNAKLAR

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory, American Mathematical society, Providence,Rhode Island.

Kaufmann, A., 1975. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London,

Malik D.S., Mordeson J.N., 1992. Fuzzy homomorphism of rings, Fuzzy Sets and Systems 49, 139-146.

Rosenfield, A., 1971. Fuzzy groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications 35, 512-517.

Sasaki, M., 1993. Fuzzy Functions, Fuzzy Sets and Systems 55, 295-301.

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353.

Rosenfeld, A., 1971. Journal of Mathematical Analysis and Applications 35, 512-517.

Anthony, J. M., Sherwood., 1979. Journal of Mathematical Analysis and Applications 69, 124-130.

Çallıalp, F., 2009. Soyut Matematik. Birsen Yayınevi LTD. ŞTİ., İSBN: 978-975-511-417-3, 214 s, 29-88.

Çallıalp, F., 2013. Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Basım Yayın Dağıtım Ltd. Şti., İSBN: 978-975-511-350-9, 327 s, 69-120.

İncekalan, T., 2006. Bulanık Gruplar ve Halkalar. Yüksek Lisans Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, 63 s., 2-22.

Mordeson J.N., Malik D.S., 1998. Fuzzy Commutative Algebra 1. P O Box 128, Farrer Road, Singapore 912805. İSBN: 981-02-3628-X, 401 s., 1-10.

ÖZGEÇMİŞ

Özkan KÖSA 19.12.1990 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini İstanbul Zilşan Alkoç İlkokulunda okudu. Orta öğrenimini Samsun/Çarşamba Yeşilırmak Lisesinde tamamladı. 2009 yılında girdiği Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında bitirdi. 2013 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında başladığı yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir.