T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU SOLİTONLAR VE LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

EMİRHAN ÖZDEMİR

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. MEHMET ÜNLÜ
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. AYNUR ÇÖL
YRD. DOÇ. DR. İSHAK CUMHUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE – 2017

T.C

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU SOLİTONLAR ve LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ danışmanlığında, Emirhan ÖZDEMİR tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 27/11/2017 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Doç. Dr. Aynur ÇÖL	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Matematikte solitonlar, bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel çözümleridir. Bu tez çalışmasının amacı, Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, değiştirilmiş KdV denklemi ve lineer olmayan Schrödinger denklemi gibi bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin N-soliton çözümleri için ADV (Aktosun, Demontis, Van der Mee) metodu olarak bilinen genel bir metodu açık formüller elde etmek için uygulamaktır.

Yüksek lisans eğitimim süresince beni yönlendiren ve bana yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ’ye, tüm bölüm hocalarıma, çalışmam boyunca benden yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Süleyman ŞENGÜL’e ve tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Emirhan ÖZDEMİR

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Çoklu Solitonlar ve Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemler" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 27/11/2017

Emirhan ÖZDEMİR

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

ÇOKLU SOLİTONLAR VE LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Emirhan ÖZDEMİR

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNLÜ

Soliton, sabit hızla şeklini değiştirmeden hareket eden bir soliter dalgadır. Çoklu solitonlar ise birden fazla soliton barındıran çözümlerdir. Çoklu solitonlar içindeki her bağımsız soliton kendine ait bir hızla hareket eder ve birbirlerini doğrusal olmayacak şekilde etkilerler. Bu etkileşim esnasında şekilleri değişir ve etkileşimden sonra kendi orijinal şekline geri dönerler. Matematikte solitonlar, bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel çözümleridir. Bunlar, ilgili adi diferansiyel denklemde geri yansımaz potansiyele karşılık gelir.

Bu çalışmanın amacı bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin N-soliton çözümlerinin tam çözüm formüllerini elde etmek için ADV (Aktosun, Demontis, Van der Mee) metodu olarak bilinen genel bir metodu uygulamaktır. Bu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden bazıları Korteweg-de Vries, değiştirilmiş Korteweg-de Vries ve lineer olmayan Schrödinger denklemleridir. Bu açık formüller bir A, B, C sabit üçlü matrisi cinsinden yazılır ve üstel matristen faydalanılır. Burada N, herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere A matrisi $N \times N$, B matrisi $N \times 1$ ve C matrisi $1 \times N$ boyutundadır.

2017, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Soliton, Çoklu Solitonlar, KdV Denklemi, mKdV Denklemi, NLS Denklemi.

ABSTRACT

MULTI-SOLITONS AND NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Emirhan ÖZDEMİR

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet ÜNLÜ

A soliton is a solitary wave traveling at a constant speed without changing its shape. Multi-solitons are solutions that contain two or more solitons. Multi-solitons are special in the sense that the individual solitons in them travel at their own speeds and those individual solitons interact nonlinearly with each other. While this interaction their shapes is changed, and they return to their original shapes after the interaction. Solitons in mathematics are special solutions to some nPDE. They correspond to reflectionless potentials in the corresponding linear ordinary differantial equations.

The aim of this thesis is to apply a general method by known ADV (Aktosun-Demontis-Van der Mee) method to acquire explicit formulas for the N-soliton solutions to some to some nPDE's. These nPDE's are KdV, mKdV, NLS, etc. Such explicit formulas are expressed in terms of a constant matrix triplet A,B,C and by using matrix exponential. Here, A has a matrix size $N \times N$, B has a matrix size $N \times 1$, and C has a matrix size $1 \times N$, where N is a positive integer.

2017, 57 pages

Keywords: Soliton, Multi-Solitons, KdV Equation, mKdV Equation, NLS Equation.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

α	Alfa
β	Beta
γ	Gamma
ϵ	Epsilon
δ	Delta
φ	Phi
ω	Omega
ψ	Psi
g	Yerçekimi Sabiti
h	Suyun Derinliği
v	Hız
d	Genlik
†	Matris Transpoz ve Kompleks Eşlenik
$exp(A)$	A Matrisinin Üstel Gösterimi
KdV	Korteweg-de Vries
mKdV	Değiştirilmiş (modified) Korteweg-de Vries
NLS	Lineer Olmayan Schrödinger

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Dalgalar, bir cismin ortamdaki sarsıntıyla yeni düzene geçtiği hal olarak tanımlanabilir. Dalgalar zamana ve konuma bağlı sinyallerdir ve onların yayılımları çeşitli kısmi diferansiyel denklemler tarafından ifade edilir. Dalgalar, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çalışmalarında görülmektedir ve ilerlemeleri esnasında şekillerini ve genliklerini korumaktadır. Basit bir dalga $f(x - ct)$ fonksiyonu ile tanımlanır. Burada x konumu, t zamanı ve c dalganın hızını belirtir. Eğer c pozitif ise dalga sağ tarafa, c negatif ise dalga sol tarafa doğru hareket eder. Dalgalar; salınım, frekans, periyot ve hız gibi karakteristik özelliklere sahiptir. Bu özellikler bize dalgaların matematiksel olarak daha iyi tanımlanmasına yardımcı olur. Daha komplike bir dalga farklı sabit frekanslara sahip olan basit sinüzoidal dalgalarla oluştuğu varsayılabilir. Eğer bu sinüzoidal bileşenlerin her biri aynı hızda ise bu dalga saçılımsız bir dalga olarak adlandırılır ve dalga hiçbir değişikliğe uğramaksızın hareketine devam eder. Ancak bu hız aynı olmadığı takdirde bu dalga yayılır ve şekli değişerek hareketine devam eder.

Doğada birçok dalga çeşidi vardır. Bunların bazıları elektro-manyetik dalgalar, ses dalgaları, şok dalgaları ve sismik dalgalardır. Genelde bir dalganın tanımlanabilmesi için iki bağımsız değişken olan zaman ve konum ve onların iki değişkenli fonksiyonu olan $u(x, t)$'ye ihtiyaç duyulur.

Soliton üzerinde yapılan çalışmalar 18.yy dayanmaktadır. Araştırmacılar özel çözümleri olan lineer olmayan dalga denklemlerine ulaşmışlardır. Tek bir soliton sabit hızda ve şeklini koruyarak hareketlerini sürdürür. Çoklu solitonlar ise birçok solitondan oluşur ve onların hızları, şekli farklı olabilir. Çoklu solitonlarda bağımsız solitonlar birbirleri ile etkileşime girer. Günümüzde soliton kavramı fiziğin birçok bilim dalındaki bilim adamlarının hayal gücünü zorlamıştır. Tarihsel olarak bir solitonun ilk gözlemi İskoç bilim adamı John Scott Russel tarafından Ağustos 1834 de gerçekleşmiştir. Glasgow ve Paisley arasındaki dar bir kanalda Russel hızla giden bir botun durduktan sonraki oluşturduğu dalgayı izleyerek yeni bir gözlem yaptı. Russel oluşan şeklin yuvarlak, düz ve şeklinin değişmeden hareket ettiğini gözlemlemiştir.

Bu tezde çalışılacak üç denklem, solitonlar üzerinde yapılan araştırmalar arasında en geniş çapta olanlarıdır (Garcia, 2010). Bu denklemler Korteweg-de Vries (KdV), değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV), lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemleridir. Korteweg-de Vries (KdV) denklemi kalp tarafından pompalanan kanın akışını (Duan vd., 1997; Kevrekidis vd., 2003) ve soğuk plazmada hidro manyetik akışı tanımlamak, değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi trafik sıkışıklığını (Komatsu ve Sasa, 1995) modellemek, lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) derin sulardaki yüzey dalgalarını ve optik fiberlerdeki elektro manyetik dalgaları modellemekte kullanılır.

1.2. Tanımlar

Tanım 1.1. Bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denkleme *diferansiyel denklem* denir.

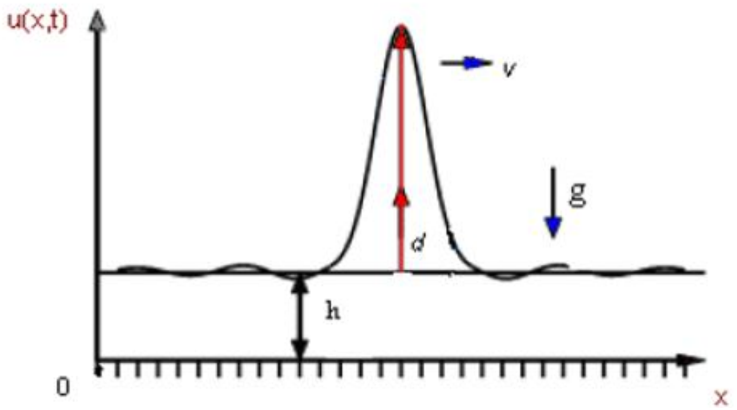
Bir diferansiyel denklem eğer tek bir değişken içeriyorsa bu tür denklemlere *adi diferansiyel denklem* denir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir.

Tanım 1.2. Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferansiyel denkleme *lineer diferansiyel denklem* denir.

Eğer diferansiyel denklemde bağımlı değişken, üstel, logaritmik veya trigonometrik olarak bulunuyorsa ya da bağımlı değişkenin kendisi veya herhangi bir türevinin derecesi birden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere de *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

Tanım 1.3. g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve bir kanalda hareket eden d genliğindeki bir soliter dalga, $v = \sqrt{g(d+h)}$ hızına sahiptir. Başka bir deyişle dalganın hızı; genliğine, suyun yüksekliğine ve derinliğine bağlıdır.



Şekil 1. Bir soliter dalga

$u(x,t) = f(x - vt)$ ile ifade edilen dalganın $v > 0$ olması halinde, x ekseninin pozitif yönünde; $v < 0$ olduğunda ise x ekseninin negatif yönünde hareket ettiği belirtilmektedir.

Tanım 1.4. A, $n \times n$ boyutunda reel veya kompleks değerli bir matris olsun. I_n, $n \times n$ boyutunda birim matris, Z_n ise sıfır matrisi olarak tanımlanırsa

$A\ matrisinin$ $üstel\ gösterimi\ e^A$ veya $exp(A)$ şeklindedir. Bu üstel gösterimin seri açılımı

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

şeklindedir.

Üstel matrisin bazı özellikleri,

- $e^{Z_n} = I_n$
- $e^{\lambda A} e^{\mu A} = e^{(\lambda+\mu)A}$
- Eğer $AB = BA$ ise $e^A e^B = e^{A+B}$ dir.
- $e^A e^{-A} = I_n$
- A matrisi e^{tA} ile değişmelidir. $(Ae^{tA} = e^{tA}A)$
- Eğer $D = diag(d_1, d_2, \dots \dots \dots, d_i, \dots \dots \dots, d_n)$ ise

  $e^D = diag(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots \dots, e^{d_i}, \dots \dots, e^{d_n})$ dir.

- Eğer B tersi mevcut ise $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$ dir.
- $\det(e^A) = e^{iz(A)}$

Tanım 1.5. (Leibnitz Kuralı)

$u = u(x)$ ve $v = v(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve diferensiyellenebilir iki fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir f fonksiyonu için

$$\frac{d}{d_x}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt\right] = f\big(x, v(x)\big)v'(x) - f\big(x, u(x)\big)u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

Özel olarak, eğer $u(x) = u\ ve\ v(x) = v\ (u, v \epsilon \mathbb{R})$ ise

$\frac{d}{d_x}\left[\int_u^v f(x,t)dt\right] = \int_u^v \frac{d}{d_x} f(x,t)dt$ olur.

Tanım 1.6. (İntegrallenebilirlik)

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi, ters saçılım metodu yardımıyla çözülebilirse buna lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin integrallenebilirliği denir.

Tanım 1.7. Dalgalar oluşması esnasında ve sonrasında şekillerini değiştirmiyorsa bu dalgalara soliter (solitary) dalga adı verilmektedir.

Tanım 1.8. (d'Alembert Çözümü)

D'Alembert yöntemi, bir telin titreşimini modelleyen tek boyutlu dalga denklemi olan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1.2.1}$$

denklemine bir çözüm getirir.

Genel çözüm, yeni değişkenler $\xi = x - ct$ ve $\eta = x + ct$ tanımlanarak elde edilebilir. Zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$= -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{1.2.3}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(-c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(-c\frac{\partial y}{\partial \xi} + c\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)$$

$$= c^2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2c^2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \tag{1.2.5}$$

olur. Bu ifadeler yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{1.2.6}$$

elde edilir. Bu kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y(x,t) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$= f(x - ct) + g(x + ct) \tag{1.2.7}$$

şeklindedir. Burada, f sağa ve g ise sola hareket eden dalgayı temsil eden keyfi fonksiyonlardır. Tel boyunca fark fonksiyonu x ve dikey hızı $\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = v_0(x)$ olmak üzere $y(x, t = 0) = y_0(x)$ pozisyonunda bulunan bir tel için başlangıç değer problemi aşağıdaki gibi bulunabilir. Başlangıç şartları ve (1.2.7) den

$$y_0(x) = f(x) + g(x) \tag{1.2.8}$$

olur. t' ye göre türev alınırsa

$$v_0(x) = f'(x)\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + g'(x)\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}$$

$$= -cf'(x) + cg'(x) \tag{1.2.9}$$

ve integral alınırsa

$$\int_a^x v_0(s)ds = -cf(x) + cg(x) \tag{1.2.10}$$

elde edilir. (1.2.8) ve (1.2.10), f ve g fonksiyonları için aynı anda çözülürse

$$f(x) = \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x v_0(s)ds \tag{1.2.11}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x v_0(s)ds \tag{1.2.12}$$

bulunur ve bu ifadeler (1.2.8) de yerine yerine yazılırsa

$$y(x,t) = \frac{1}{2}y_0(x-ct) + \frac{1}{2}y_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds \tag{1.2.13}$$

şeklinde, belirtilen başlangıç şartlarıyla verilen dalga denklemi için çözüm bulunmuş olur.

1.3. KdV Denklemi İçin Varlık ve Teklik

Miura, Gardner ve Kruskal (1968), KdV denkleminin dikkat edilmesi gereken özelliklerden bir tanesi olan enerji integrallerinin sonsuz sayıda var olduğunu gösterdiler. Daha sonra Kametaka (1969), Bona ve Smith (1975), KdV denklemi için başlangıç değer probleminin bir tek global çözümünün varlığını ispatladılar. Korteweg-de Vries denkleminin bir başlangıç değer problemini

$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0$

$$u(x,0) = g(x), \qquad -\infty < x < +\infty \tag{1.3.1}$$

şeklinde alınsın. Başlangıç değer probleminin bir tek düzgün çözümünün var olduğunu ispatlamak için

$n = 0,1,2,3,4$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^n g}{dx^n}\right|^2 < \infty \tag{1.3.2}$$

koşulu (Bona ve Smith 1975), belirli bir özdeğer problem çözümüne sahip olması için de

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|g(x)|d_x < \infty \tag{1.3.3}$$

koşulu kullanılır.

Başlangıç ve sınır değer problemi ise bir ucunda dalga yapıcıyla suyu içeren bir düzgün açık kanalın matematiksel modeli olarak düşünülebilir. Bu başlangıç ve sınır değer problemi

$\mathbb{R}^+ \times (0,T)$ üzerinde $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$;

$x \in \mathbb{R}^+$ için $u(x,0) = u_0$,

$u(0,t) = 0$ ve $x \to \infty$ için $u(x,t) \to 0$ (1.3.4)

şeklinde ele alınsın. Eğer $u_0, W_0^{1,2}(\mathbb{R}^+)^7$ içinde ise (1.3.4)' ün bir zayıf global çözümü var olduğu gösterilir. $u_0, W_0^{6,2}(\mathbb{R}^+)$ içindeyken $\|u_0\|_{6,2}$ küçükse o zaman, $T = T_1$ ile

$\mathbb{R}^+ \times (0,T_1)$ üzerinde (1.3.4)'ün bir tek klasik çözümü vardır (Ton 1977).

u_{xxx}' in işareti değiştiğinde başlangıç sınır değer problemi

$\mathbb{R}^+ \times (0,T)$ üzerinde $u_t + uu_x - u_{xxx} = 0$;

$u(x,0) = u_0, \ u(0,t) = u_x, u_x(0,t) = 0$ ve $x \to \infty$ için $u(x,t) \to 0$ (1.3.5) şeklinde ele alınsın. Eğer $\|u_0\|_{2,2}$ küçük ve $T = T_1$ iken $u_0, W_0^{2,2}(\mathbb{R}^+)$ içinde ise $\mathbb{R}^+ \times (0, T_1)$ üzerinde (1.3.5)'in bir tek zayıf çözümün var olduğu gösterilir. $u_0, W_0^{6,2}(\mathbb{R}^+)$ içindeyken çözüm klasiktir (Ton 1977).

Ayrıca KdV denkleminin

$$u_t - uu_x - u_{xxx} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$$
$$u(x,0) = g(x), \ \ x \in \mathbb{R}^+ \qquad (1.3.6)$$

şeklindeki Cauchy problemi için varlık ve tekliğine Kametaka (1969) kaynağına bakılabilir.

1.4. KdV Denklemi İçin Tam Çözüm Yöntemleri

KdV denklemi genel olarak

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0$$

formundadır. Burada $u = u(x,t)$ dalga fonksiyonudur. c, dalga yüzünün hızı olmak üzere bazı n değerleri için spesifik tam çözümler aşağıdaki tablodaki biçimde belirlenir.

n	$u(x,t)$	n	$u(x,t)$
1	$\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right)$	4	$\left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{c}(x-ct)\right)$
2	$\sqrt{c}\operatorname{sech}\left((\sqrt{c}(x-ct))\right)$	5	$\left(\frac{7c}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\operatorname{sech}^{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right)$
3	$\sqrt[3]{\frac{5c}{2}}\operatorname{sech}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right)$	6	$\left(\frac{14c}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\operatorname{sech}^{\frac{1}{3}}\left(3\sqrt{c}(x-ct)\right)$

KdV denkleminin birçok özel çözümü vardır. Bunlardan bazıları bäcklund dönüşümü, ters saçılma dönüşüm, sinüs-kosinüs, üstel fonksiyon, (G'/G)- açılım ve jacobi eliptik fonksiyon açılım metotlarıdır. Burada yalnızca ters saçılma dönüşümü ele alınacaktır.

1.4.1. KdV Denklemi İçin Ters Saçılma Dönüşümü Yöntemi

Ters saçılma dönüşüm metodu bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılır (Çulha, 2014). Bu metot Fourier dönüşümünün lineer olmayan bir benzeridir. İlk olarak

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad\qquad -\infty < x < \infty \qquad (1.4.1.1)$$

formundaki KdV denklemi ele alınsın. Sonrasında Sturm-Liouville problemi ile bir bağıntısının var olduğu gösterilsin. Bunu göstermenin basit yollarından bir tanesi

$v(x,t)$ fonksiyonunu

$$u = v^2 + v_x \qquad (1.4.1.2)$$

olacak şekilde ifade etmektir. Bu dönüşüme Miura dönüşümü adı verilmektedir. (1.4.1.2), (1.4.1.1) de yerine yazılırsa

$$2vv_t + v_{xt} - 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) + 6v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0$$

elde edilir. Denklem düzenlendiğinde

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial_x}\right)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0 \qquad (1.4.1.3)$$

şeklini alır. Dolayısıyla v,

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (1.4.1.4)$$

denkleminin bir çözümü ise o zaman (1.4.1.2) denklemi, (1.4.1.1) KdV denkleminin bir çözümünü ifade eder.

(1.4.1.2) denklemi Riccati tipi diferensiyel denklemdir. Diferensiyellenebilir fonksiyon olan $\psi(x;t) = 0$ için

$$v = {}^{\psi_x}/_{\psi} \qquad (1.4.1.5)$$

dönüşümüyle (1.4.1.2) denklemi lineerleştirilebilir. (1.4.1.2) denklemi (1.4.1.5) dönüşümüyle ψ için

$$\psi_{xx} - u\psi = 0$$

zamandan bağımsız Sturm-Liouville denklemi haline gelir. Bağıntı KdV denkleminin Galile tipi invaryant olarak alınmasıyla tamamlanmış olur. Yani

$$u(x,t) \to \lambda + u(x + 6\lambda, t), \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

ifadesi keyfi (reel) bir λ için (1.4.1.1) denklemini değişmez kılar. Çünkü x-bağımlılığı bu dönüşüm altında değişmezdir. u yerine $u - \lambda$ olarak alınırsa

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1.4.1.6}$$

olur. Bu ise u potansiyelli ve λ özdeğerli Sturm-Liouville denklemidir. Bu denklem ψ için çözülürse, (1.4.1.5) ve (1.4.1.2) denklemleri yardımıyla u hesaplanabilir.

Şimdi ters saçılma dönüşümünün, KdV denklemi için başlangıç değer probleminin çözümünün bulunmasında nasıl kullanılacağı anlatılacaktır.

$u(x,0) = f(x)$ koşulu ile

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

Öncelikle $t = 0$' da verilen $u(x,0)$ değeri için saçılma problemi çözülebilir. (1.4.1.6)'daki Strum-Liouville denkleminin spektrumu, $\lambda > 0$için $\lambda = k^2$ ve $\lambda < 0$ için $\lambda = -\kappa_n^2$ şeklinde sonlu sayıda özdeğerden oluşmaktadır. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar hesaplanabilir ve bunların asimptotik davranışları aşağıda görüldüğü gibidir.

$0 < \lambda = k^2$ ile

$x \to \infty$ iken $\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}$

$x \to -\infty$ iken $\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx}$

ve $0 > \lambda = -\kappa_n^2$ ile

$x \to \infty$ iken $\psi_n(x,t) \sim c_n exp(-\kappa_n x)$

Böylece $t = 0$ anındaki saçılıma verisi

$S(\lambda, 0) = \left\{ \left(\kappa_n, c_n(0) \right)_{n=1}^{N}, b(k, 0), a(k, 0) \right\}$

olarak elde edilir. Burada $-\kappa_n^2$ ayrık spektrumu, $c_n(0)$ normalleştirme sabitlerini, $b(k, 0)$ ve $a(k, 0)$ ise yansıma ve iletim katsayılarını temsil eder. Bulunan bu saçılma verisinin zamana bağlı gelişimi (time evolution) belirlenebilirse, o zaman herhangi ileriki bir zamandaki saçılma verisini aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$\kappa_n =$ sabit

$c_n(t) = c_n(0)\exp(4\kappa_n^3 t)$

$a(k, t) = a(k, 0)$

$b(k, t) = b(k, 0)\exp(8ik^3 t)$

Böylece $t > 0$ anındaki saçılma verisi

$S(\lambda, t) = \left\{ \left(\kappa_n, c_n(t) \right)_{n=1}^{N}, b(k, t), a(k, t) \right\}$

olarak bulunur. $S(t)$ saçılma verisinden $u(x, t)$ potansiyelinin bulunması, Sturm-Liouville denklemi için ters saçılma problemi olarak adlandırılır. Bunun için öncelikle saçılma verisi kullanılarak

$$F(X; t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0) \exp(8\kappa_n^3 t - \kappa_n X) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k; 0) exp(8ik^3 t + ikX) dk$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde Marchenko denklemini gerekli kılar. $K(x, z; t)$ için Marchenko denklemi

$$K(x, z; t) + F(x + z; t) + \int_{x}^{\infty} K(x, y; t) \, F(y + z; t) dy = 0$$

şeklindedir. Son olarak da

$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial_x} \mathcal{K}(x, t)$ ve $\mathcal{K}(x, t) = K(x, x, t)$

eşitlikleri yardımıyla $u(x, t)$ potansiyeli bulunur. KdV denklemi için ters saçılma dönüşümünün, lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan Fourier dönüşümüyle paralellik gösterdiğini ifade edelim. Bunun için de KdV denkleminin lineerleştirilmesi olan

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0$$

örneği ele alınsın. Eğer $u(x,0) = f(x)$ ise

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\, dk$$

veya

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\, dx$$

şeklinde yazılabilir. $A(k)$ saçılma verisi olan $S(0)$' a benzerdir. Dahası $w = w(k)$ olmak üzere

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-wt)}\, dk$$

ise o zaman

$$w(k) = k - k^3$$

tür. w' nin içindeki terim saçılma verisinin zamana bağlı gelişimini ifade eder.

Sonuç olarak gösterilmiş olan ters saçılma metodu bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem çözümünü iki lineer problem çözümüne indirger. Ayrıca $u(x,0) = -2\operatorname{sech}^2 x$ başlangıç koşullu KdV denkleminin tek soliton çözümü

$$u(x,t) = -2\operatorname{sech}^2(x-4t)$$

şeklinde elde edilirken, $u(x,0) = -6\operatorname{sech}^2 x$ başlangıç koşullu KdV denkleminin iki soliton çözümü de

$$u(x,t) = -12\frac{3 + 4\cosh(2x-8t) + \cosh(4x-64t)}{(3\cosh(x-28t) + \cosh(3x-64t))^2}$$

şeklinde elde edilir.

1.5. Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Açık Çözümleri

Bu bölümde, ilgili zamana bağlı Marchenko denkleminin $x \geq 0$ için açık çözümünün, A B,C gibi matrisler (Aktosun vd., 2007)çözümü ele alınacaktır. Bu çözümler (1.5.8) de verilen formül yardımıyla (3.3.1.1)'in çözümüne yol gösterir. Ayrıca, kesin çözümün oluşturulmasında kullanılan $Q(x,t)$, $N(x)$ ve $\Gamma(\mathrm{x},\mathrm{t})$ gibi kilit matrislerin özelikleri incelenecektir. Marchenko denkleminin çekirdeği için

$$\Omega(y) = Ce^{-Ax}B, \qquad y \geq 0 \tag{1.5.1}$$

alınır ve ayrışma özelliği kullanılırsa

$$\Omega(x+y) = Ce^{-Ax}e^{-Ay}B$$

elde edilir. Buradan zamana bağlı Marchenko denkleminin çekirdeği

$$\Omega(y;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda)e^{4i\lambda^2 t}e^{i\lambda y}d\lambda + \sum_{j=m+1}^{m+n}\sum_{s=0}^{n_j-1} C_{js}(t)\frac{y^s}{s!}\, e^{i\lambda_j y}$$

şeklindedir. Bu zamana bağlı çekirdek

$$\Omega_{\mathrm{t}}(y;t) + 4i\Omega_{\mathrm{yy}}(y;t) = 0$$

birinci dereceden kısmi diferensiyel denklemi sağlar. Bu kısmi diferensiyel denklemin çözümünde (1.5.1) bir başlangıç şartı olarak alınır ve

$$\Omega(y;t) = Ce^{-Ay-4iA^2t}B, \quad y \geq 0 \tag{1.5.2}$$

yazılır. Buradan

$$\Omega(y;t)^{\dagger} = B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}y+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} \tag{1.5.3}$$

elde edilir. Zamana bağlı Marchenko integral denklemi

$$K(x,y;t) - \Omega(x+y;t)^{\dagger} + \int_x^{\infty} dz \int_x^{\infty} K(x,s;t)\Omega(s+z;t)\Omega(z+y;t)^{\dagger}ds = 0 \tag{1.5.4}$$

şeklinde elde edilir. (1.5.2) ve (1.5.3), (1.5.4) de yazılırsa

$$K(x,y;t) = H(x;t)e^{-A^{\dagger}y+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} \tag{1.5.5}$$

olur. (1.5.5) denklemi (1.5.4) de yazılırsa

$$H(x;t)\,\Gamma(\mathrm{x},\mathrm{t}) = B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x} \tag{1.5.6}$$

elde edilir. (1.5.6), (1.5.5) de kullanılırsa, (1.5.4)'ün çözümü

$$K(x,y;t) = B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(\mathrm{x,t})^{-1}e^{-A^{\dagger}y+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} \tag{1.5.7}$$

olur. Buradaki $\Gamma(\mathrm{x;t})$ terslenebilirdir. $u(x,t) = 2K(x,x;t)$ eşitliğinden (Aktosun vd., 2007)

$$u(x,t) = -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(\mathrm{x,t})^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} \tag{1.5.8}$$

elde edilir. (1.5.8) iki determinantın oranı şeklinde yazılırsa

$$u(x,t) = \frac{detF(x;t)}{det\Gamma(\mathrm{x;t})} \tag{1.5.9}$$

olur. Burada

$$F(x;t) \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x} \\ e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} & \Gamma(\mathrm{x;t}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1. 1.

$Q(x,t)$ ve $N(x)$ sırasıyla

$$Q(x,t) = e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Q(0,0)e^{-Ax-4iA^2 t} \text{ ve } N(x) = e^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x} \tag{1.5.10}$$

eşitliklerini sağlar.

Teorem 1. 1.

A' nın özdeğerlerinin pozitif reel kısma sahip olduğu kabul edilsin. O halde, her $x,t \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler doğrudur.

- $Q(x,t)$, $N(x)$ matrisleri pozitif ve kendi döngeldir (self-adjoint). Sonuç olarak birer pozitif kendi döngel (self-adjoint) $Q(x,t)^{\frac{1}{2}}$ ve $N(x)^{\frac{1}{2}}$ matrisleri vardır.
- $\Gamma(x;t)$ matrisi terslenebilirdir.
- $\Gamma(x;t)$'nin determinantı pozitiftir.

Önerme 1. 2.

A'nın özdeğerlerinin pozitif reel kısma sahip olduğu kabul edilsin. O halde, her $x,t \in \mathbb{R}$ $Q(x,t)$, $N(x)$ ve $\Gamma(x;t)$ matrisleri

$$Q_x = -A^{\dagger}Q - QA,\ N_x = -AN - NA^{\dagger},\ Q_t = 4i[(A^{\dagger})^2 Q - QA^2] \tag{1.5.11}$$

$$\Gamma^{\dagger} = I + NQ,\ \ \Gamma^{-1}Q = Q(\Gamma^{\dagger})^{-1},\ \ (\Gamma^{\dagger})^{-1}N = N\Gamma^{-1} \tag{1.5.12}$$

şeklindedir.

Teorem 1. 2.

Her $x, t \in \mathbb{R}$ için $Q(x,t)$ ve $N(x)$ matrisleri aynı anda terslenebilirdir ancak ve ancak A, B, C üçlü matrisli $\Omega(y)$ minimum ve A'nın özdeğerleri pozitif reel kısma sahip olmalıdır.

Teorem 1. 3.

Herhangi bir sabit $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ için

$$Q(x,t) = e^{-A^{\dagger}(x-x_0)+4i\left(A^{\dagger}\right)^2(t-t_0)}Q(x_0,t_0)e^{-A(x-x_0)-4iA^2(t-t_0)}$$

$$N(x) = e^{-A(x-x_0)}N(x_0)e^{-A^{\dagger}(x-x_0)}$$

şeklindedir.

Sonuç 1. 1.

A'nın özdeğerlerinin pozitif reel kısımlara sahip olduğunu kabul edelim. O halde, $N(x)$ matrisi her $x \in \mathbb{R}$ için terslenebilirdir ancak ve ancak $N(x)$, x'in belirli bir değerinde terslenebilir olmalıdır. Benzer şekilde $Q(x,t)$ her $x, t \in \mathbb{R}$ için terslenebilirdir ancak ve ancak $Q(x,t)$, xt-düzlemi üzerindeki belirli bir noktada terslenebilirdir.

Önerme 1. 3.

Eğer A matrisinin özdeğerleri pozitif reel kısma sahipse, o halde $\Gamma(x;t)$, $\Gamma(x;t) \to I$, $x \to +\infty$ sağlar. Buna ek olarak, eğer $Q(0,0)$,$N(0)$ matrisleri terslenebilir ise $x \to -\infty$ iken $\Gamma(\mathrm{x},\mathrm{t})^{-1} \to 0$ dir. Burada I ve 0 lar sırasıyla $p \times p$ ve sıfır matrisleridir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu tezde Korteweg-de Vries

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV)

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

ve lineer olmayan Schrödinger

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0$$

integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin N-soliton çözümleri için kompakt formüllerini elde ederek, onların soliton çözümlerinin davranışlarını analiz etmeye çalışacağız.

Burada x konum değişkeni, t ise zaman değişkenidir. u_x ve u_t sırasıyla konum ve zaman türevlerini temsil etmektedir.

Yukarıda verilen üç denklemin soliton çözümleri için birçok yöntem olmasına rağmen (Ablowitz vd., 1981; Ablowitz ve Clarkson, 1991; Gardner vd., 1967; Hirota, 2004; Novikov vd., 1984) bu çalışmada ele alınan yöntem Prof. Dr. Tuncay AKTOSUN, Dr. F.DEMONTIS ve Prof. Dr. C. Vander MEE bilim insanları tarafından geliştirilen "ADV" yöntemi (Aktosun ve Van der Mee, 2006; Aktosun, 2009; Aktosun vd.,2010) olacaktır. Bu yöntem A, B ve C gibi sabit üç matris ve N-soliton çözümleri bulunurken kolaylık olması için üstel matrisler kullanmaktadır. Üstel matrislerin kullanılması soliton çözüm formülleri için genel bir formül geliştirilmesine imkân sağlamaktadır.

ADV yönteminin ana fikri (2.1) denklemindeki $\Omega(x,t)$ çekirdeğinin yerine A, B, C üçlü matrisini yazıp üstel matrisleri kullanmaktır. Böylece skaler nicelik x i içerip y yi içermeyen, y yi içerip x i içermeyen iki vektörün skaler çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Bu ayrışım (2.1) deki ters saçılım problemi için kesin bir çözüm olmasına imkân sağlar

$$\begin{array}{ccccc} u(x,0) & \rightarrow & S(\gamma,0) & \rightarrow & \Omega(x,0) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ u(x,t) & \leftarrow & S(\gamma,t) & \leftarrow & \Omega(x,t) \end{array} \qquad (2.1)$$

Esas itibariyle $\Omega(x,0)$ ve $\Omega(x,t)$ nicelikleri A, B ve C üçlü matris ve üstel matris yardımıyla açık bir şekilde aşağıda olduğu gibi yazılabilir.

$$\Omega(\mathrm{x},0)=\begin{cases}\mathrm{Ce^{-Ax}B} & \mathrm{(KdV)}\\ \mathrm{Ce^{-Ax}B} & \mathrm{(mKdV)}\\ \mathrm{Ce^{-Ax}B} & \mathrm{(NLS)}\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\Omega(\mathrm{x},\mathrm{t})=\begin{cases}\mathrm{Ce^{-Ax+8A^3t}B} & \mathrm{(KdV)}\\ \mathrm{Ce^{-Ax+8A^3t}B} & \mathrm{(mKdV)}\\ \mathrm{Ce^{-Ax-4iA^2}}^{t}\mathrm{B} & \mathrm{(NLS)}\end{cases} \tag{2.3}$$

Burada A, N × N boyutunda pozitif değerli sabit bir diyagonal matris olup; B, tüm elemanları 1 olan N × 1 boyutunda sütun vektör ve C ise pozitif değerli $1 \times \mathrm{N}$ boyutunda bir satır vektörüdür.

$$A=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \beta_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \beta_N\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$B=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$C=[\,\gamma_1 \;\; \gamma_2 \;\; \dots \;\; \gamma_N\,] \tag{2.6}$$

Amacımız yukarıda adı geçen integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri A, B, C üçlü matris ve üstel matris özelliklerini kullanarak soliton çözümlerini elde etmektir. Bu formüller kompakt olacaktır. Ancak bulunan formüller için kaç tane soliton olursa olsun üstel matrisin kullanımı sayesinde hiçbir şekilde formüller değişmeyecek ve kolaylıkla yazılabilecektir. Burada değişen tek şey N olacaktır. Çünkü N soliton sayısını göstermektedir. Buna bağlı olarak A, B, C matrislerinin boyutları da değişecektir. Bu çalışmada soliton çözümleri analiz edilip, onların değişimlerini gözlemleyebilmek için Maxima programı kullanılacaktır.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1. Korteweg-de Vries Denklemi

KdV denklemi lineer olmayan bir ortamda dalgaların yayılmalarını tanımlamak için kullanılan bir denklemdir (Miura, 1976). Bu denklem ilk olarak uzun, sığ ve dar kanallardaki su yüzeyinde oluşan yayılımı tanımlamak için kullanılmıştır.

John Scoot Russel kanaldaki dalganın hem sabit bir hızla hareket ettiğini hem de dalganın şeklinin değişmediğini gözlemleyen kişidir. Bu tip dalgalar soliter olarak adlandırılır. Birçok bilim adamı ve matematikçi Russel'ın gördüğü bu duruma inanmayıp reddettiler. Ancak 1895 de Alman matematikçi Diederik Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries bunun gibi dalgaların varlığını ispat etmek için çalışmalar yaptılar ve bu dalgaları tanımlamak için bir matematiksel model oluşturdular (Korteweg ve De Vries, 1895). Bu matematiksel model günümüzde KdV denklemi olarak adlandırılır.

1965 de Norman J. Zabusky ve Martin David Kruskal, KdV denklemi için çoklu soliton çözümlerini keşfettiler. Korteweg ve Vries, elde ettikleri denklemin tekil soliton çözümlerini elde ettiler. Ancak KdV denkleminin çözümlerinin ilginç özelliklere sahip olması onları daha kompakt bir metot bulmaya sevk etmiştir. 1967 de bir grup matematiksel fizikçiler, integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile adi diferansiyel denklemler arasında bir bağlantı bulmuşlardır (Ablowitz vd., 1980). Gardner, Greene, Kruskal ve Miura, KdV denklemi için başlangıç değer probleminin ters saçılım dönüşümü metoduyla çözülebileceğini önerdiler. KdV denklemi üzerindeki çalışmalar, mKdV denklemi ve lineer olmayan Schrödinger denklemi gibi diğer bazı denklemler üzerindeki araştırmaları arttırmıştır.

3.1.1. Tekil Soliton Çözümü ve Gösterimi

Korteweg-de Vries denklemi

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.1.1.1}$$

şeklindeki integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel bir denklemdir. Burada $u = u(x,t)$ genellikle potansiyel fonksiyon olarak adlandırılır. (3.1.1.1) denkleminin çözümleri reel değerli olup (Aktosun vd., 2007) x ve t değişkenlerine bağlıdır. Buradaki x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleridir. (3.1.1.1) denkleminin lineer olmamasının sebebi, $-6uu_x$ terimidir.

Öncelikle (3.1.1.1) denkleminin bilinen tekil soliton çözümü

$$u(x,t) = \alpha \mathrm{sech}^2(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \tag{3.1.1.2}$$

incelenecek ve (3.1.1.1) denklemini sağladığı gösterilecektir. Burada α, β, γ ve ε parametreleri (3.1.1.2) denklemi (3.1.1.1)'in çözümü olacak şekilde belirlenmelidir. Bunun için (3.1.1.2) çözümünün (3.1.1.1) denklemindeki x ve t değişkenine göre türevleri alınır ve kolaylık olması için

$$\varphi := \beta x + \gamma t + \varepsilon$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$u_t = -2\alpha\gamma \mathrm{sech}^2\varphi \tanh\varphi \tag{3.1.1.3}$$
$$u_x = -2\alpha\beta \mathrm{sech}^2\varphi \tanh\varphi \tag{3.1.1.4}$$
$$u_{xx} = 4\alpha\beta^2 \mathrm{sech}^2\varphi \tanh^2\varphi - 2\alpha\beta^2 \mathrm{sech}^4\varphi \tag{3.1.1.5}$$
$$u_{xxx} = 16\alpha\beta^3 \mathrm{sech}^4\varphi \tanh\varphi - 8\alpha\beta^3 \mathrm{sech}^2\varphi \tanh^3\varphi \tag{3.1.1.6}$$

elde edilir. (3.1.1.3)-(3.1.1.6)'da elde edilen türevler ve (3.1.1.2) çözümü (3.1.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &-2\alpha\gamma \mathrm{sech}^2\varphi \tanh\varphi + 12\alpha^2\beta \mathrm{sech}^4\varphi \tanh\varphi \\ &+16\alpha\beta^3 \mathrm{sech}^4\varphi \tanh\varphi - 8\alpha\beta^3 \mathrm{sech}^2\varphi \tanh^3\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.1.1.7}$$

bulunur. Eğer

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \quad , \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

trigonometrik bağıntıları kullanılırsa (3.1.1.7) eşitliği

$$-2\alpha\gamma\frac{1}{\cosh^2(\varphi)}\frac{\sinh(\varphi)}{\cosh(\varphi)}+12\alpha^2\beta\frac{1}{\cosh^4(\varphi)}\frac{\sinh(\varphi)}{\cosh(\varphi)}+16\alpha\beta^3\frac{1}{\cosh^4(\varphi)}\frac{\sinh(\varphi)}{\cosh(\varphi)}$$

$$-8\alpha\beta^3\frac{1}{\cosh^2(\varphi)}\frac{\sinh^3(\varphi)}{\cosh^3(\varphi)}=0 \qquad (3.1.1.8)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\frac{-2\alpha\gamma\sinh(\varphi)\cosh^2(\varphi)+12\alpha^2\beta\sinh(\varphi)+16\alpha\beta^3\sinh(\varphi)-8\alpha\beta^3\sinh^3(\varphi)}{\cosh^5(\varphi)}$$

$$=0 \qquad (3.1.1.9)$$

elde edilir.

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

eşitliğinden

$$\frac{(-2\alpha\gamma+12\alpha^2\beta+16\alpha\beta^3)\sinh(\varphi)+(-2\alpha\gamma-8\alpha\beta^3)\sinh^3(\varphi)}{\cosh^5(\varphi)}=0 \qquad (3.1.1.10)$$

bulunur. Son eşitlikten $-2\alpha\gamma-8\alpha\beta^3=0$ ve $-2\alpha\gamma+12\alpha^2\beta+16\alpha\beta^3=0$ elde edilir. Buradan

$$\gamma=-4\beta^3 \qquad (3.1.1.11)$$

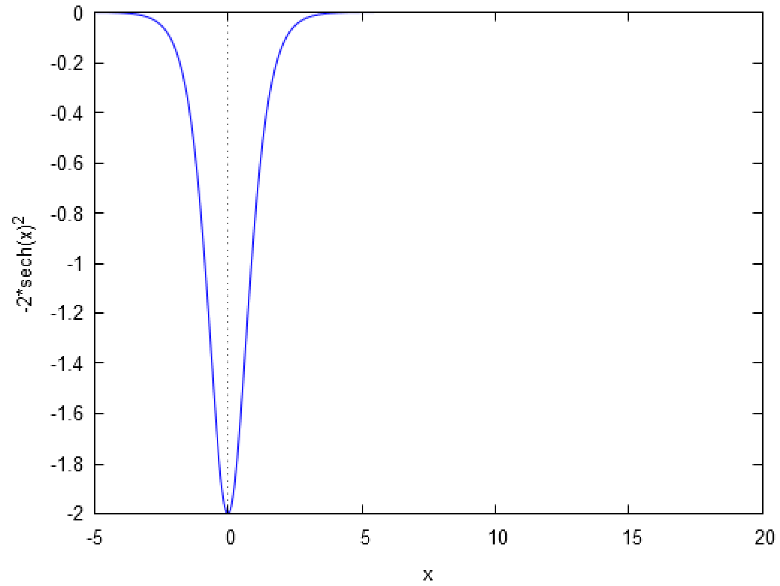
$$\alpha=-2\beta^2 \qquad (3.1.1.12)$$

ifadeleri elde edilir. ε ise keyfi bir sabit olmak üzere (3.1.1.11) ve (3.1.1.12), (3.1.1.2) çözümünde yerine yazılırsa

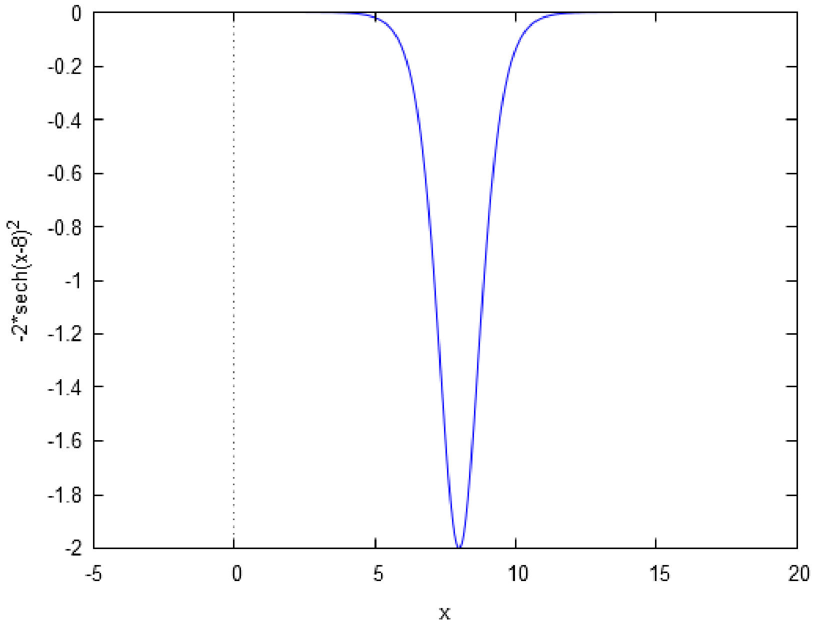
$$u(x,t)=-2\beta^2 sech^2(\beta(x-4\beta^2 t)+\varepsilon) \qquad (3.1.1.13)$$

bulunur.

Böylelikle β, ε sabitleri ile bir-soliton çözümü elde edildi. Eğer iki-soliton çözümünün elde edilmesi istenseydi 4 reel parametreye, üç-soliton çözümü için 6 reel parametreye ihtiyaç duyulacaktı. Bu durum genellenecek olursa N-soliton çözümü elde etmek istediğimizde 2N reel parametreye ihtiyaç vardır.

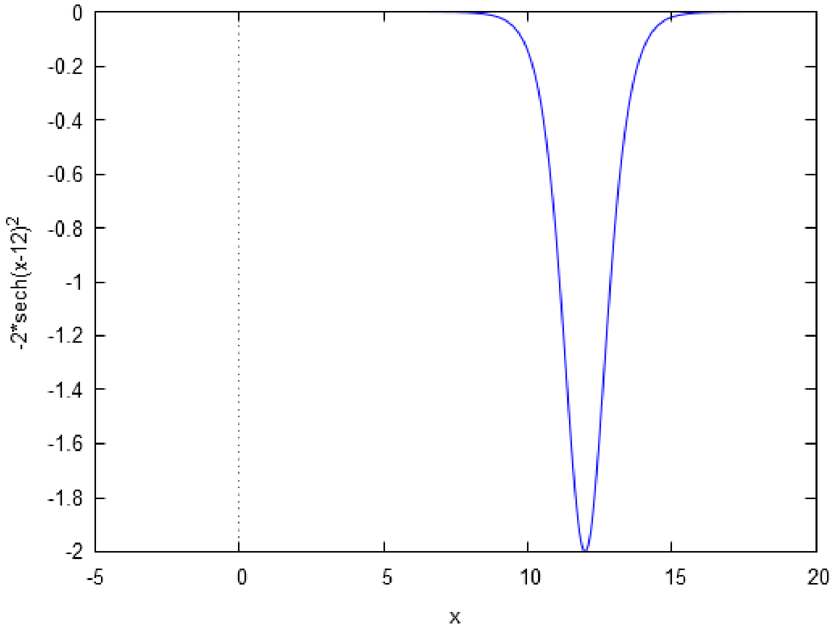


$t = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0$

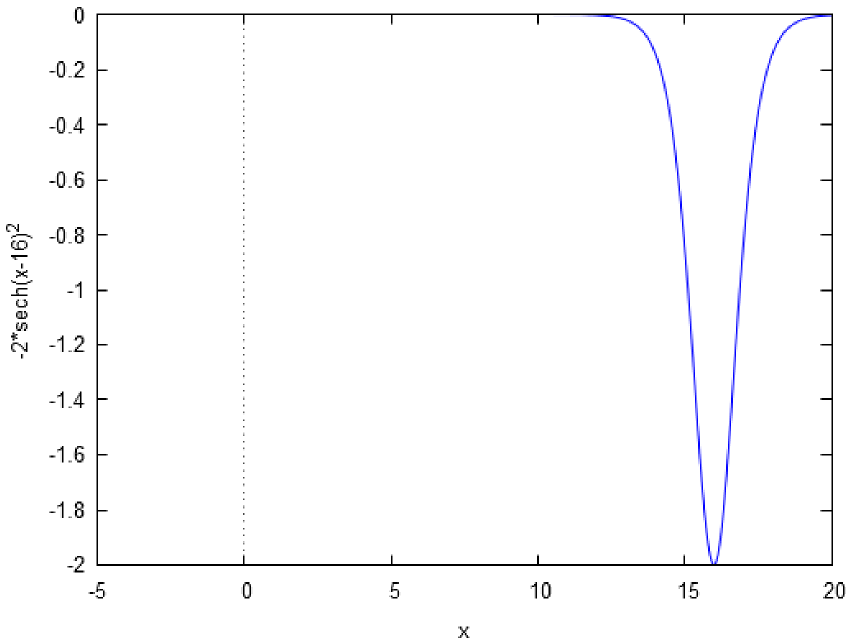


$t = 2, \beta = 1, \varepsilon = 0$

Şekil 2. KdV denkleminin tekil-soliton gösterimi



$t = 3, \beta = 1, \varepsilon = 0$



$t = 4, \beta = 1, \varepsilon = 0$

Şekil 2 (devam). KdV denkleminin tekil-soliton gösterimi

(3.1.1.1) denklemi solitonun fiziksel özellikleri hakkında önemli bilgi içerir. Solitonun genliği $2\beta^2$ terimi tarafından ifade edilir (Şekil 2). Ayrıca (3.1.1.13)'den görüleceği üzere $\forall x, t \in \mathbb{R}$ için $u(x,t) < 0$ olduğundan soliton daima x-ekseninin altında oluşacaktır. Solitonun hızı ise $4\beta^2$ terimi tarafından ifade edilir. $\beta^2 > 0$

olduğundan $4\beta^2 > 0$ olur. Dolayısı ile soliton daima sağa doğru hareket eder. Çözümdeki ε parametresi solitonun başlangıç pozisyonunu belirlememize yardımcı olur.

3.1.2. N-Soliton Gösterimi ve Grafiği

Bu kısımda (3.1.1.1) denklemi için N-soliton formülü elde edilecek ve elde edilen formülün (3.1.1.1) denklemini sağladığı gösterilecektir. (3.1.1.1) denkleminin N-soliton çözümü için formül, ADV metodu kullanılarak bulunacaktır. Bu yöntemde (3.1.1.2)'de verilen $u(x,t)$ çözümündeki α, β ve ε parametreleri yerine A, B, C matrisleri ve üstel matrisler kullanılmaktadır.

ADV yöntemine göre N-soliton çözüm

$$u(x,t) = -4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma(x,t)^{-1}A\Gamma(x,t)^{-1}e^{-Ax}B \tag{3.1.2.1}$$

ile verilir. Burada

$$\Gamma(x,t) := I + e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax} \tag{3.1.2.2}$$

dir.

(3.1.2.2)'de verilen I, $N \times N$ boyutunda birim matristir. Ayrıca A, B ve C matrisleri ise sırasıyla (2.4), (2.5) ve (2.6) formundaki matrislerdir. (3.1.2.1)'de verilen $u(x,t)$ çözümünün boyutu ise N dir. Burada skaler değerler yerine üçlü sabit bir matris ve üstel matris kullanıldığında ve matris çarpımında matrisler her zaman yer değiştiremeyeceğinden hesaplamalar biraz komplekstir.

(3.1.1.1)'deki KdV denklemi alternatif olarak

$$u_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0 \tag{3.1.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. $\Gamma(x,t)$'nin t'ye göre türevi Leibnitz kuralı kullanılarak

$$\Gamma_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{I}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}\right)$$

$$= e^{-Ax}\left(\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3})dz\right)e^{-Ax}$$

$$= 8e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}A^3 \qquad (3.1.2.4)$$

(3.1.2.2) eşitliğinden

$$\Gamma - \mathrm{I} = e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax} \qquad (3.1.2.5)$$

ifadesi (3.1.2.4)' de yerine yazılırsa

$$\Gamma_t = 8(\Gamma - \mathrm{I})A^3 \qquad (3.1.2.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Gamma(x,t)$'nin x'e göre türevi

$$\Gamma_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{I}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}\right)$$

$$= -Ae^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}$$

$$+e^{-Ax}\left(\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}\right)$$

$$= -Ae^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}$$

$$+e^{-Ax}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}$$

$$+e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}\, dz\right)\frac{\partial}{\partial x}(e^{-Ax})$$

$$= -Ae^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}$$

$$+e^{-Ax}\left(\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}\right)dz\right)e^{-Ax}$$

$$+e^{-Ax}\left(\int_0^\infty e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)(-A)e^{-Ax}$$

elde edilir. $e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}$ fonksiyonu x değişkeninden bağımsız olduğundan x'e göre türevi sıfıra eşit olduğundan

$$\Gamma_x = -Ae^{-Ax}\left(\int_0^{\infty} e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}$$
$$-e^{-Ax}\left(\int_0^{\infty} e^{-zA}BCe^{-zA+8tA^3}dz\right)e^{-Ax}$$

bulunur. (3.1.2.5) eşitliğinden

$$\Gamma_x = -A(\Gamma - \mathrm{I}) - (\Gamma - \mathrm{I})\mathrm{A} \qquad (3.1.2.7)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\mathrm{I} = \Gamma^{-1}\Gamma$$

olduğundan bu eşitliğin her iki tarafının x değişkenine göre türevi alınırsa

$0 = (\Gamma^{-1})_x\Gamma + \Gamma^{-1}\Gamma_x$ veya
$(\Gamma^{-1})_x\Gamma = -\Gamma^{-1}\Gamma_x$

bulunur. Son eşitlik sağdan Γ^{-1} ile çarpılırsa

$$\Gamma_x^{-1} = -\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1} \qquad (3.1.2.8)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\Gamma_t^{-1} = -\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1} \qquad (3.1.2.9)$$

elde edilir.

Şimdi $\Gamma(\mathrm{x},\mathrm{t})$ fonksiyonu ve türevlerinden yararlanarak u_x, u_{xx} ve u_t ifadelerini bulalım. (3.1.2.1) ifadesinin t'ye göre türevi alınırsa

$$u_t = -32Ce^{-Ax+8A^3t}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B - 4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma_t^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$-4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma_t^{-1}e^{-Ax}B$$

bulunur. (3.1.2.9) eşitliği kullanılırsa

$$u_t = -32Ce^{-Ax+8A^3t}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B - 4Ce^{-Ax+8A^3t}(-\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1})A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$-4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A(-\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1})e^{-Ax}B$$

elde edilir. (3.1.2.6) eşitliği kullanılarak

$$u_t = -32Ce^{-Ax+8A^3t}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$+4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}(8(\Gamma - \mathrm{I})A^3)\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$+4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}(8(\Gamma - \mathrm{I})A^3)\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= -32Ce^{-Ax+8A^3t}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$+32Ce^{-Ax+8A^3t}[\Gamma^{-1}\Gamma A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$
$$+32Ce^{-Ax+8A^3t}[\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\Gamma A^3\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$

$$= 32Ce^{-Ax+8A^3t}[-A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$

elde edilir. Sadeleştirmeden sonra

$$u_t = 32Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B \quad (3.1.2.10)$$

bulunur. Benzer şekilde $u(x,t)$'nin x değişkenine göre türevi alınırsa

$$u_x = 4Ce^{-Ax+8A^3t}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B - 4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma_x^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$-4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}\,A\Gamma_x^{-1}e^{-Ax}B + 4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}Ae^{-Ax}B$$

bulunur. (3.1.2.8) eşitliği kullanılırsa

$$u_x = 4Ce^{-Ax+8A^3t}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B - 4Ce^{-Ax+8A^3t}(-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$
$$-4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A(-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})e^{-Ax}B + 4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}Ae^{-Ax}B$$

elde edilir. (3.1.2.7) eşitliği yerine yazılırsa

$$u_x = 4Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma A + 2A)\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma A + 2A)\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

$$= 4Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

$$= 4Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A + 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

$$= 4Ce^{-Ax+8A^3t}[-2\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + 4\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$u_x = -8Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}e^{-Ax}B + 16Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B \quad (3.1.2.11)$$

bulunur. İşlem kolaylığı açısından

$\delta := -8Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$ ve $\tau := 16Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$

şeklinde tanımlansın. δ' nın x'e göre türevi

$$\delta_x = -8Ce^{-Ax+8A^3t}[-A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + (\Gamma^{-1})_xA^2\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^2(\Gamma^{-1})_x$$
$$- \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

olur. (3.1.2.8) eşitliği kullanılarak

$$\delta_x = 8Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - (-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2(-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})$$
$$+\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

elde edilir. Şimdide (3.1.2.7) eşitliği kullanılırsa

$$\delta_x = 8Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma\mathrm{A} + 2\mathrm{A})\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma\mathrm{A} + 2\mathrm{A})\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A]\, e^{-Ax}B$$

$$= 8Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + -\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

$$= 8Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} - A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A - \Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

bulunur. Sadeleştirmelerden sonra

$$\delta_x = 8Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B \qquad (3.1.2.12)$$

elde edilir. τ'nun x değişkenine göre türevi

$$\tau_x = 16Ce^{-Ax+8A^3t}[-A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + (\Gamma^{-1})_xA\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A(\Gamma^{-1})_xA\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A(\Gamma^{-1})_x - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

olur. (3.1.2.8) eşitliği kullanılarak

$$\tau_x = -16Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - (-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A(-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A(-\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1})$$
$$+\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

bulunur. (3.1.2.7) eşitliği kullanılarak

$$\tau_x = -16Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma\mathrm{A} + 2\mathrm{A})\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma\mathrm{A} + 2\mathrm{A})\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma\mathrm{A} + 2\mathrm{A})\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

elde edilir. Buradan

$$\tau_x = -16Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$
$$= -16Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

olur. Sadeleştirmelerden sonra

$$\tau_x = 16Ce^{-Ax+8A^3t}[-2\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}$$
$$+6\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B \qquad (3.1.2.13)$$

elde edilir.

$u_{xx} = \delta_x + \tau_x$

olduğundan (3.1.2.12) ve (3.1.2.13)'de elde edilen türevler yerine yazılırsa

$$u_{xx} = -16Ce^{-Ax+8A^3t}[\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} - 3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - 3\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+6\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B \qquad (3.1.2.14)$$

elde edilir.

Şimdi KdV denklemindeki u^2 terimini hesaplanırsa

$$u^2 = \left(-4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B\right)(-4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B)$$

$$= 16\, Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}(e^{-Ax}BCe^{-Ax+8A^3t})\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= 16\, Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$

olur. (3.1.2.7) eşitliği kullanılırsa

$$u^2 = 16\, Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}(-A\Gamma - \Gamma\mathrm{A} + 2\mathrm{A})\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B$$

olur. Buradan

$$u^2 = 16\, Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\mathrm{A}\Gamma\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\Gamma A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$

$$= 16\, Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$
$$-3u^2 = 48Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B \qquad (3.1.2.15)$$

bulunur. (3.1.2.14) ve (3.1.2.15) yardımıyla

$$-3u^2 + u_{xx} = -48Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}e^{-Ax}B - 16Ce^{-Ax+8A^3t}[\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} - 3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}$$
$$-3\Gamma^{-1}A^2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} + 6\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$

bulunur. Sadeleştirmelerden sonra

$$-3u^2 + u_{xx} = -16Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}e^{-Ax}B \qquad (3.1.2.16)$$

elde edilir. (3.1.2.16) eşitliğinin x'e göre türevi alınırsa

$$(-3u^2 + u_{xx})_x = -16Ce^{-Ax+8A^3t}[-A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} + \Gamma_x^{-1}A^3\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^3\Gamma_x^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

bulunur. (3.1.2.8) eşitliği kullanılırsa

$$(-3u^2 + u_{xx})_x = 16C\, e^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

elde edilir. Şimdi de (3.1.2.7) eşitliği kullanılırsa

$$(-3u^2+u_{xx})_x = 16\,Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}+\Gamma^{-1}(-A\Gamma+\mathrm{A}-\Gamma\mathrm{A}+\mathrm{A})\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}(-A\Gamma+\mathrm{A}-\Gamma\mathrm{A}+\mathrm{A})\Gamma^{-1}+\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

$$=16\,Ce^{-Ax+8A^3t}[A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}-\Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1}-A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}-\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A-\Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}+\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A]e^{-Ax}B$$

bulunur. Sadeleştirmelerden sonra

$$(-3u^2+u_{xx})_x = 16\,Ce^{-Ax+8A^3t}[-2\Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1}+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B \qquad (3.1.2.17)$$

elde edilir. (3.1.2.10) ve (3.1.2.16) eşitlikleri (3.1.2.3)'de yerine yazılırsa

$$u_t+(-3u^2+u_{xx})_x = 32Ce^{-Ax+8A^3t}[-\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}+\Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1}$$
$$-\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B+16\,Ce^{-Ax+8A^3t}[-2\Gamma^{-1}A^4\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}+2\Gamma^{-1}A^3\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}]e^{-Ax}B$$
$$=0$$

bulunur. Böylece (3.1.2.1), (3.1.1.1)'in bir çözümü olduğu gösterilmiş oldu.

3.2. Değiştirilmiş Korteweg-de Vries Denklemi

Değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi, Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ile benzerdir. Değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denkleminde, Korteweg-de Vries (KdV) denklemindeki $-6uu_x$ terimi yerine $6u^2u_x$ terimi bulunur. Dikkat edilirse mKdV denkleminde lineer olmayan terim pozitif, KdV denkleminde ise bu terim negatiftir.

3.2.1. Tekil-Soliton Çözümü ve Gösterimi

Değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.2.1.1)$$

şeklindeki integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel bir denklemdir. (3.2.1.1) denkleminin çözümleri, KdV denkleminde olduğu gibi reel değerli olup x ve t değişkenlerine bağlıdır.

Öncelikli olarak (3.2.1.1) denkleminin bilinen tekil-soliton çözümü

$$u(x,t) = \alpha \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \quad (3.2.1.2)$$

incelenecek ve (3.2.1.1) denklemini sağladığı gösterilecektir. Buradaki α, β, γ ve ε parametreleri (3.2.1.2) denklemi (3.2.1.1)'nin çözümü olacak şekilde belirlenmelidir. Bunun için (3.2.1.2) çözümünün x ve t değişkenlerine göre türev alınırsa

$$u_t = -\alpha\gamma\, \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \quad (3.2.1.3)$$
$$u_x = -\alpha\beta\, \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \quad (3.2.1.4)$$
$$u_{xx} = \alpha\beta^2\, \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh^2(\beta x + \gamma t + \varepsilon) - \alpha\beta^2\mathrm{sech}^3(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \quad (3.2.1.5)$$
$$\begin{aligned} u_{xxx} &= 5\alpha\beta^3\mathrm{sech}^3(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \\ &\quad -\alpha\beta^3\, \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh^3(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.2.1.6)$$

elde edilir.

(3.2.1.1) denkleminde bulunan u^2 terimini bulabilmek için (3.2.1.2)'nin her iki tarafının karesi alınırsa,

$$u^2 = \alpha^2\mathrm{sech}^2(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \quad (3.2.1.7)$$

elde edilir.

(3.2.1.3)- (3.2.1.7)'de elde edilen türevler (3.2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &-\alpha\gamma\, \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \\ &-6\alpha^3\beta\mathrm{sech}^3(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \\ &+5\beta^3\alpha\mathrm{sech}^3(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh(\beta x + \gamma t + \varepsilon) \\ &-\beta^3\alpha\, \mathrm{sech}(\beta x + \gamma t + \varepsilon)\tanh^3(\beta x + \gamma t + \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.1.8)$$

bulunur. İşlem kolaylığı için

$\mu := \beta x + \gamma t + \varepsilon$

olarak tanımlanır ve trigonometrik eşitlikler kullanılırsa

$$-\alpha\gamma \frac{1}{\cosh(\mu)} \frac{\sinh(\mu)}{\cosh(\mu)} - 6\alpha^3\beta \frac{1}{\cosh^3(\mu)} \frac{\sinh(\mu)}{\cosh(\mu)} + 5\beta^3\alpha \frac{1}{\cosh^3(\mu)} \frac{\sinh(\mu)}{\cosh(\mu)}$$

$$-\beta^3\alpha \frac{1}{\cosh(\mu)} \frac{\sinh^3(\mu)}{\cosh^3(\mu)} = 0 \qquad (3.2.1.9)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{-\alpha\gamma \sinh\mu \cosh^2\mu - 6\alpha^3\beta \sinh\mu + 5\beta^3\alpha \sinh\mu - \beta^3\alpha \sinh^3\mu}{\cosh^4\mu} = 0 \qquad (3.2.1.10)$$

bulunur.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

eşitliğinden

$$\frac{-\alpha\gamma \sinh\mu(1 + \sinh^2\mu) - 6\alpha^3\beta \sinh\mu + 5\beta^3\alpha \sinh\mu - \beta^3\alpha \sinh^3\mu}{\cosh^4\mu} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$-\alpha\gamma \sinh\mu(1 + \sinh^2\mu) - 6\alpha^3\beta \sinh\mu + 5\beta^3\alpha \sinh\mu - \beta^3\alpha \sinh^3\mu = 0$$

veya

$$\sinh^3\mu[-\alpha\gamma - \beta^3\alpha] + \sinh\mu[-\alpha\gamma - 6\alpha^3\beta + 5\beta^3\alpha] = 0$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$-\alpha\gamma - \beta^3\alpha = 0 \quad , \quad -\alpha\gamma - 6\alpha^3\beta + 5\beta^3\alpha = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\gamma = -\beta^3 \qquad (3.2.1.11)$$

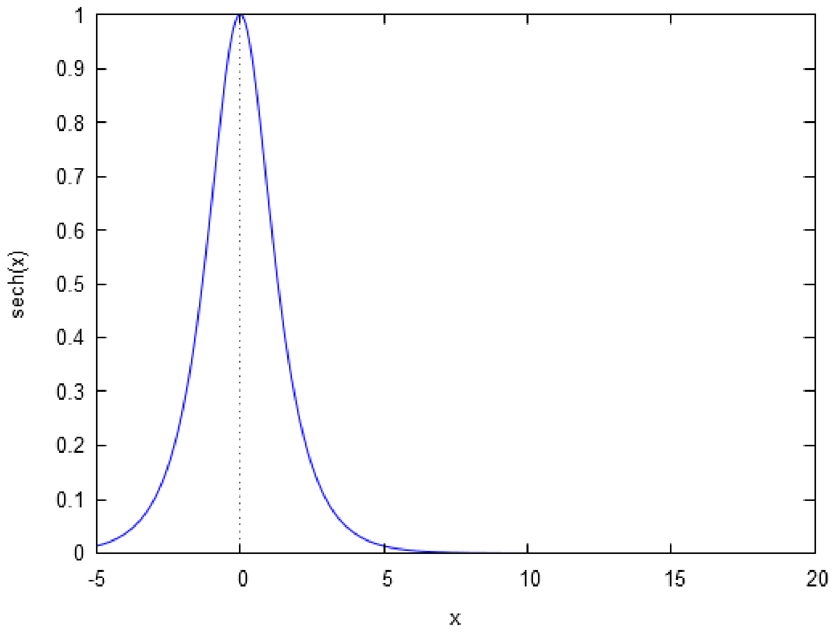
ve

$$\alpha = \pm\,\beta \tag{3.2.1.12}$$

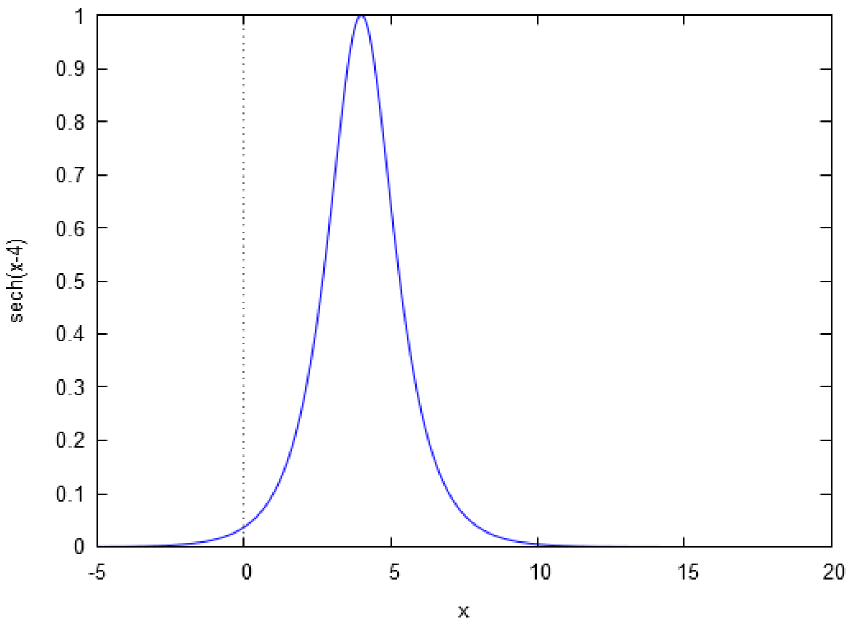
ifadeleri elde edilir. ε ise keyfi sabittir. (3.2.1.11) ve (3.2.1.12), (3.2.1.2) çözümünde yerine yazılırsa

$$u(x,t) = \pm\beta \mathrm{sech}(\beta(x - \beta^2 t) + \varepsilon) \tag{3.2.1.13}$$

elde edilir.

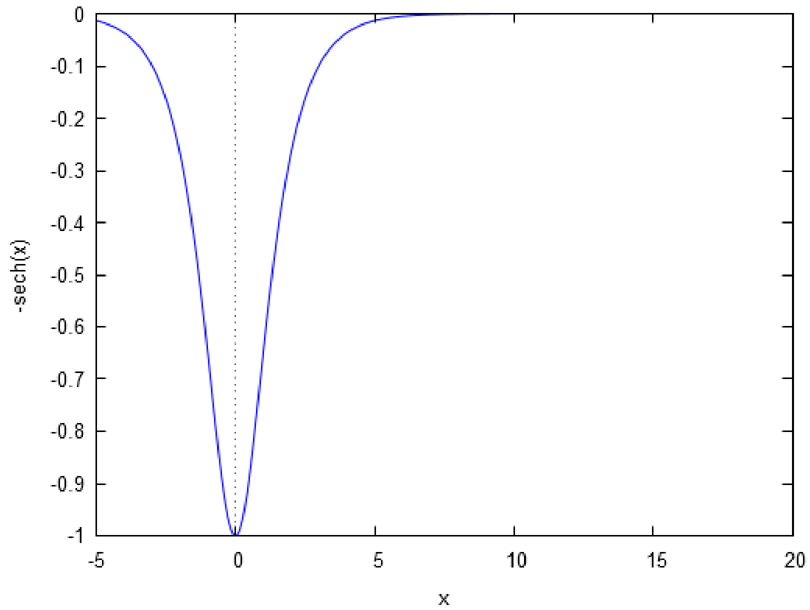


$t = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0$

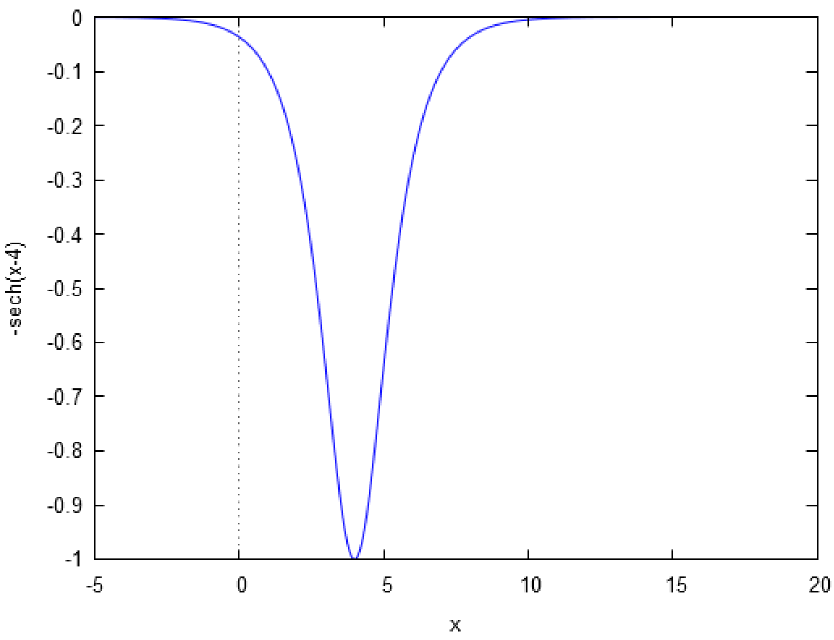


$t = 4, \beta = 1, \varepsilon = 0$

Şekil 3. mKdV denkleminin tekil-soliton gösterimi



$t = 0, \beta = -1, \varepsilon = 0$



$t = 4, \beta = -1, \varepsilon = 0$

Şekil 3 (devam). mKdV denkleminin tekil-soliton gösterimi

Böylelikle β ifadesi, (3.1.13) çözümünün genliğini temsil etmektedir. β ifadesinin önündeki '$\pm$' işaretler solitonun $x-$ ekseni boyunca eksenin hem aşağısında hem de yukarısında görülebileceğini ifade etmektedir (Şekil 3). β^2 ifadesi ise solitonun hızını temsil eder. $\beta^2 > 0$ olduğu için soliton daima sağ tarafa doğru hareket edecektir. Solitonun başlangıç pozisyonu ise ε tarafından belirlenir.

3.2.2. N-Soliton Gösterimi ve Grafiği

Bu kısımda KdV denkleminde olduğu gibi mKdV denkleminin N-soliton gösterimi ADV metodu yardımıyla elde edilmektedir. KdV denkleminin N-soliton gösteriminde yapıldığı gibi (3.2.1.2)'de verilen $u(x,t)$ çözümündeki parametreler yerine A, B, C matrisleri ve üstel matrisler kullanılmaktadır.

ADV yöntemine göre N-soliton çözüm

$$u(x,t) = -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{+})^{3}t}C^{\dagger} \tag{3.2.2.1}$$

ile verilir. (3.2.2.1)'deki '†' işareti adjoint (transpoze ve kompleks eşlenik) matrisi temsil eder. $u = u(x,t)$, reel değerli olduğu için $u = u^{\dagger}$ olur. Bundan dolayı

$$u^{\dagger}(x,t) = u(x,t) = -2Ce^{-Ax+8A^{3}t}(\Gamma(x,t)^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B \tag{3.2.2.2}$$

bulunur. Burada

$$\Gamma(\mathrm{x},\mathrm{t}) = I + Q(x,t)N(x) \tag{3.2.2.3}$$

dir. (3.2.2.3)'deki $Q(x,t)$ ve $N(x)$ ifadeleri ise

$$Q(x,t) \coloneqq \int_{x}^{\infty} e^{-A^{+}z+8(A^{+})^{3}t}C^{+}Ce^{-Az+8A^{3}t}dz \tag{3.2.2.4}$$

$$N(x) \coloneqq \int_{x}^{\infty} e^{-As}BB^{+}e^{-A^{+}s}ds \tag{3.2.2.5}$$

şeklinde verilmiştir.

(3.2.1.1)'deki mKdV denklemi alternatif olarak

$$u_t + 3uu^\dagger u_x + 3u_x u^\dagger u + u_{xxx} = 0 \tag{3.2.2.6}$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.2.4) ve (3.2.2.5)'deki eşitlikler

$$Q(x,t) = e^{-A^\dagger x + 8(A^\dagger)^3 t} Q(0,0) e^{-Ax + 8A^3 t} \tag{3.2.2.7}$$

$$N(x) = e^{-Ax} N(0) e^{-A^\dagger x} \tag{3.2.2.8}$$

şeklinde ifade edilebilir. Öte yandan Q ve N ifadeleri reel değerli oldukları için

$$Q = Q^\dagger$$
$$N = N^\dagger$$

olur. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla (3.2.2.3) eşitliği

$$\Gamma^\dagger(x,t) = I + Q(x,t)N(x) \tag{3.2.2.9}$$

elde edilir.

$u(x,t)$ çözümünün x ve t ye göre türevlerini almadan önce Γ_x^{-1} ve Γ_t^{-1} eşitliklerini bulmamız gerekir. KdV denkleminde yapılan işlemlere benzer işlemler yardımıyla

$$\Gamma_x^{-1} = -\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}$$
$$\Gamma_t^{-1} = -\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1}$$

dir. Buradaki Γ_x ve Γ_t kısmi türevleri ise (3.2.2.3)'ün x ve t'ye göre türevleri alınıp yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_x^{-1} &= -\Gamma^{-1}[Q_x(x,t)N(x) + Q(x,t)N_x(x)]\Gamma^{-1} \\ &= -\Gamma^{-1}[-A^\dagger e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t} Q(0,0) e^{-Ax+8A^3 t} e^{-Ax} N(0) e^{-A^\dagger x} \\ &\quad - e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t} Q(0,0) e^{-Ax+8A^3 t} A e^{-Ax} N(0) e^{-A^\dagger x} \\ &\quad - e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t} Q(0,0) e^{-Ax+8A^3 t} A e^{-Ax} N(0) e^{-A^\dagger x} \\ &\quad - e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t} Q(0,0) e^{-Ax+8A^3 t} e^{-Ax} N(0) e^{-A^\dagger x} A^\dagger]\Gamma^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $Q = Q(x,t)$, $N = N(x)$ olarak devam edilirse

$$\Gamma_x^{-1} = -\Gamma^{-1}[-A^\dagger(\Gamma - \mathrm{I}) - \mathrm{QAN} - \mathrm{QAN} - (\Gamma - \mathrm{I})A^\dagger]\Gamma^{-1}$$

$$= -\Gamma^{-1}[-A^{\dagger}\Gamma - \Gamma A^{\dagger} - 2(QAN - A^{\dagger})]\Gamma^{-1}$$

$$= \Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}(A^{\dagger} - QAN)\Gamma^{-1} \tag{3.2.2.10}$$

elde edilir. Buradan

$$\Gamma_t^{-1} = -\Gamma^{-1}[Q_t(x,t)N(x)]\Gamma^{-1}$$

$$= -\Gamma^{-1}[8(A^{\dagger})^3 e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}Q(0,0)e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}e^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x}$$

$$+8e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}Q(0,0)e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}A^3 e^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x}]\Gamma^{-1}$$

$$= -8\Gamma^{-1}[(A^{\dagger})^3(\Gamma - \mathrm{I}) + QA^3N]\Gamma^{-1}$$

$$= -8[\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^3 - \Gamma^{-1}(A^{\dagger})^3\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}QA^3N\Gamma^{-1}] \tag{3.2.2.11}$$

bulunur. Şimdi (3.2.2.1) deki u'nun x değişkenine göre türevini hesaplayalım. Türevin özellikleri ve (3.2.2.10) bağıntısı kullanılarak

$$u_x = 2B^{\dagger}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} - 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}(\Gamma^{-1})_{\mathrm{x}}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$+2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$= 2B^{\dagger}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} - 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1}$$

$$-2\Gamma^{-1}(A^{\dagger} - QAN)\Gamma^{-1}]e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} + 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$= 2B^{\dagger}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} - 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}A^{\dagger}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} + 4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} + 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$u_x = -4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[QAN - A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} \tag{3.2.2.12}$$

bulunur. u'nun tekrardan x değişkenine göre türevi alınırsa

$$u_{xx} = 4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}(\Gamma^{-1})_x QAN\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}Q_x AN\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}QAN_x\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}QAN(\Gamma^{-1})_x e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$-4B^\dagger e^{-A^\dagger x}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}(\Gamma^{-1})_x A^\dagger\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}A^\dagger(\Gamma^{-1})_x e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$-4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}[A^\dagger\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} - (\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma - 2\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1})QAN\Gamma^{-1}$$

$$-\Gamma^{-1}(-A^\dagger Q - QA)AN\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}QA(-AN - NA^\dagger)\Gamma^{-1}$$

$$-\Gamma^{-1}QAN(\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}) + \Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger$$

$$-A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + (\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1})A^\dagger\Gamma^{-1}$$

$$+\Gamma^{-1}A^\dagger(\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1})$$

$$-\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger]e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[-A^\dagger QAN + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}QAN + A^\dagger QAN$$

$$+QA^2N + QA^2N + QANA^\dagger - QANA^\dagger + 4QAN\Gamma^{-1}A^\dagger - 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$+2(A^\dagger)^2 - 4A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$u_{xx} = -8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^\dagger)^2 - 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger \qquad (3.2.2.13)$$

elde edilir. (3.2.2.6)’da ki u_{xxx} terimini elde edebilmek için u_{xx}’in x değişkenine göre türevi alınırsa

$$u_{xxx} = 8B^\dagger A^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^\dagger)^2 - 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$-8B^\dagger e^{-A^\dagger x}(\Gamma^{-1})_x[-QA^2N - (A^\dagger)^2 - 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+8(A^\dagger)^3 t}C^\dagger$$

$$-8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[-2A^\dagger(\Gamma^{-1})_x QAN - 2A^\dagger\Gamma^{-1}Q_x AN - 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN_x$$

$$+2Q_x AN\Gamma^{-1}QAN + 2QAN_x\Gamma^{-1}QAN + 2QAN(\Gamma^{-1})_x QAN + 2QAN\Gamma^{-1}Q_x AN$$

$$+2QAN\Gamma^{-1}QAN_x + 2A^{\dagger}(\Gamma^{-1})_x A^{\dagger} - 2Q_x AN\Gamma^{-1}A^{\dagger} - 2QAN_x\Gamma^{-1}A^{\dagger}$$

$$-2QAN(\Gamma^{-1})_x A^{\dagger} - Q_x A^2 N - QA^2 N_x]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}](\Gamma^{-1})_x e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$+8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}]\Gamma^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$= 8B^{\dagger}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]$$

$$[-QA^2N - (A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}$$

$$+2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} - 8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}$$

$$[-2A^{\dagger}(\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1})QAN$$

$$-2A^{\dagger}\Gamma^{-1}(-A^{\dagger}Q - QA)AN - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QA(-AN - NA^{\dagger})$$

$$+2(-A^{\dagger}Q - QA)AN\Gamma^{-1}QAN + 2QA(-AN - NA^{\dagger})\Gamma^{-1}QAN$$

$$+2QAN(\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1})QAN$$

$$+2QAN\Gamma^{-1}(-A^{\dagger}Q - QA)AN + 2QAN\Gamma^{-1}QA(-AN - NA^{\dagger})$$

$$+2A^{\dagger}(\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1})A^{\dagger}$$

$$-2(-A^{\dagger}Q - QA)AN\Gamma^{-1}A^{\dagger} - 2QA(-AN - NA^{\dagger})\Gamma^{-1}A^{\dagger}$$

$$-2QAN(\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1})A^{\dagger}$$

$$-(-A^{\dagger}Q - QA)A^2N - QA^2(-AN - NA^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}][\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}$$

$$+2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]\,\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$+8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[-QA^2N - (A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}]\,\Gamma^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$u_{xxx} = -8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[6(A^{\dagger})^2\Gamma^{-1}A^{\dagger} - 6(A^{\dagger})^2\Gamma^{-1}QAN - 2(A^{\dagger})^3$$

$$+12A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN-12A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}QAN+6A^{\dagger}\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^2$$
$$-12A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}+12A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}+6A^{\dagger}\Gamma^{-1}QA^2N$$
$$-12QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN+12QAN\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}QAN-6QAN\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^2$$
$$+12QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}-12QAN\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}-6QAN\Gamma^{-1}QA^2N$$
$$-6QA^2N\Gamma^{-1}QAN+6QA^2N\Gamma^{-1}A^{\dagger}+2QA^3N]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger} \qquad (3.2.2.14)$$

elde edilir. Şimdi u'nun t değişkenine göre türevini hesaplanırsa

$$u_t=-2\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}(\Gamma^{-1})_t e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}-16\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}(A^{\dagger})^3C^{\dagger}$$
$$=16\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}[\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^3-\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^3\Gamma^{-1}$$
$$+\Gamma^{-1}QA^3N\Gamma^{-1}-\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^3]\,e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}$$
$$u_t=16\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}\Gamma^{-1}[QA^3N-(A^{\dagger})^3]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger} \qquad (3.2.2.15)$$

elde edilir. (3.2.2.1) ve (3.2.2.12) kullanılarak

$$3uu^{\dagger}u_x$$
$$=3\left[-2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{+})^3t}C^{\dagger}\right]\left[-2Ce^{-Ax+8A^3t}(\Gamma(x,t)^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B\right]$$
$$[-4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[QAN-A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}]$$

$$3uu^{\dagger}u_x=-48\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}Ce^{-Ax+8A^3t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}BB^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}$$
$$\Gamma^{-1}[QAN-A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}$$

$$=-48\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}\Gamma^{-1}[e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}Ce^{-Ax+8A^3t}]\Gamma^{-1}[e^{-Ax}BB^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}]$$
$$\Gamma^{-1}[QAN-A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}$$

elde edilir. (3.2.2.7) ve (3.2.2.8)' deki Q ve N ifadelerinin x değişkenine göre türevleri alınıp yerine yazılırsa

$$3uu^{\dagger}u_x=-48\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}\Gamma^{-1}(-Q_x)\Gamma^{-1}(-N_x)\Gamma^{-1}[QAN-A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}$$
$$=-48\mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{x}}\Gamma^{-1}[A^{\dagger}Q+QA]\Gamma^{-1}[AN+NA^{\dagger}]\Gamma^{-1}[QAN-A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3t}C^{\dagger}$$

elde edilir. Böylece

$$3uu^{\dagger}u_x = -48B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[A^{\dagger}Q\Gamma^{-1}AN + A^{\dagger}Q\Gamma^{-1}NA^{\dagger} + QA\Gamma^{-1}AN + QA\Gamma^{-1}NA^{\dagger}]$$
$$\Gamma^{-1}[QAN - A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

elde edilir. Buradan

$$A^{\dagger}Q\Gamma^{-1}NA^{\dagger} = A^{\dagger}[Q\Gamma^{-1}N]A^{\dagger} = A^{\dagger}[I - \Gamma^{-1}]A^{\dagger} = (A^{\dagger})^2 - A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger} \quad (3.2.2.16)$$
$$QA\Gamma^{-1}NA^{\dagger} = QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} \text{ ve } A^{\dagger}Q\Gamma^{-1}AN = A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN \quad (3.2.2.17)$$
$$QA\Gamma^{-1}AN = QA[I - N\Gamma^{-1}Q]AN = QA^2N - QAN\Gamma^{-1}QAN \quad (3.2.2.18)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$3uu^{\dagger}u_x = -48B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(A^{\dagger})^2 - A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger} + QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN$$
$$+QA^2N - QAN\Gamma^{-1}QAN]\Gamma^{-1}[QAN - A^{\dagger}]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

elde edilir. Böylece

$$3uu^{\dagger}u_x = -48B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[QA^2N + (A^{\dagger})^2 - (QAN - A^{\dagger})\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})$$
$$\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} \quad (3.2.2.19)$$

olur. Düzenlemeler sonucunda

$$3u_xu^{\dagger}u = -48B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(QAN - A^{\dagger})\Gamma^{-1}(QA^2N + (A^{\dagger})^2)$$
$$-(QAN - A^{\dagger})\,\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger} \quad (3.2.2.20)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak $3u_xu^{\dagger}u$ ifadesi de kolaylıkla elde edilir.

Böylelikle (3.2.2.12)-(3.2.2.20)aralığındaki eşitlilikler (3.2.2.6)'da yerlerine yazılırsa

$$16B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[QA^3N - (A^{\dagger})^3]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-48B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(QA^2N + (A^{\dagger})^2)\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})$$

$$-(QAN - A^{\dagger})\,\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})\Gamma^{-1}(QAN - A^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8(A^{\dagger})^3 t}C^{\dagger}$$

$$-48B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(QAN - A^{\dagger})\Gamma^{-1}(QA^2N + (A^{\dagger})^2)$$

$$-(QAN-A^{\dagger})\,\Gamma^{-1}(QAN-A^{\dagger})\Gamma^{-1}(QAN-A^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+8\left(A^{\dagger}\right)^{3}t}C^{\dagger}$$

$$-8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[6(A^{\dagger})^{2}\Gamma^{-1}A^{\dagger}-6(A^{\dagger})^{2}\Gamma^{-1}QAN-2(A^{\dagger})^{3}$$

$$+12A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN-12A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}QAN+6A^{\dagger}\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^{2}$$

$$-12A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}+12A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}+6A^{\dagger}\Gamma^{-1}QA^{2}N$$

$$-12QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN+12QAN\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$-6QAN\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^{2}+12QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}-12QAN\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}$$

$$-6QAN\Gamma^{-1}QA^{2}N-6QA^{2}N\Gamma^{-1}QAN+6QA^{2}N\Gamma^{-1}A^{\dagger}$$

$$+2QA^{3}N]\Gamma^{-1}A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+8\left(A^{\dagger}\right)^{3}t}C^{\dagger}=0$$

olur. Böylece

$$u_t+3uu^{\dagger}u_x+3u_xu^{\dagger}u+u_{xxx}=0$$

bulunur. Böylece (3.2.2.1)'in, (3.2.1.1)'in çözümü olduğu gösterilmiştir.

3.3. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi

Lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) lineer olmayan integrallenebilir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem adını Avusturyalı ünlü kuantum fizikçisi olan Erwin Schrödinger'den almaktadır.

3.3.1. Tekil-Soliton Çözümü ve Gösterimi

NLS denklemi

$$iu_t+u_{xx}+2|u|^2u=0 \tag{3.3.1.1}$$

şeklinde ifade edilir.

Kdv ve mKdV denklemlerinin aksine NLS denkleminin çözümleri karmaşık değerlidir. (3.3.1.1) denkleminin lineerliğini bozan terim $2|u|^2$ ifadesidir.

Bu bölümde öncelikle (3.3.1.1) denkleminin bilinen tekil soliton çözümü

$$u(x,t) = \alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c) \tag{3.3.1.2}$$

incelenecek ve (3.3.1.1) denklemini sağladığı gösterilecektir. Burada α, β, γ, ε, a, b ve c parametreleri (3.3.1.2) denklemi (3.3.1.1)'in çözümü olacak şekilde belirlenmelidir. Bunun için (3.3.1.2) çözümünün (3.3.1.1) denklemindeki x ve t değişkenine göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha i\gamma e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c) \\ &\quad +\alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}(-b\mathrm{tanh}(ax+bt+c)\mathrm{sech}(ax+bt+c)) \\ &= \alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c)[i\gamma - b\mathrm{tanh}(ax+bt+c)] \\ &= u[i\gamma - b\mathrm{tanh}(ax+bt+c)] \end{aligned} \tag{3.3.1.3}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha i\beta e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c) \\ &\quad +\alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}(-a\mathrm{tanh}(ax+bt+c)\mathrm{sech}(ax+bt+c) \\ &= \alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c)[i\beta - a\mathrm{tanh}(ax+bt+c)] \\ &= u[i\beta - a\mathrm{tanh}(ax+bt+c)] \end{aligned} \tag{3.3.1.4}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \alpha i\beta e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c)[i\beta - a\mathrm{tanh}(ax+bt+c)] \\ &\quad +\alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}[-a\mathrm{tanh}(ax+bt+c)\mathrm{sech}(ax+bt+c) \\ &\quad (i\beta - a\mathrm{tanh}(ax+bt+c)) + \mathrm{sech}(ax+bt+c)[-a^2\mathrm{sech}^2(ax+bt+c)]] \\ &= \alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax+bt+c)[-\beta^2 - ai\beta\mathrm{tanh}(ax+bt+c) \\ &\quad -ai\beta\mathrm{tanh}(ax+bt+c) + a^2\mathrm{tanh}^2(ax+bt+c) - a^2\mathrm{sech}^2(ax+bt+c)] \end{aligned}$$

$$= u[-\beta^2 - 2ai\beta \frac{\sinh(ax+bt+c)}{\cosh(ax+bt+c)} + a^2 \left[\frac{\sinh^2(ax+bt+c)}{\cosh^2(ax+bt+c)} - \frac{1}{\cosh^2(ax+bt+c)}\right]\Bigg] \quad (3.3.1.5)$$

elde edilir.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

eşitliğinden

$$u_{xx} = u[-\beta^2 - 2ai\beta \tanh(ax+bt+c) + a^2 \left[\frac{\cosh^2(ax+bt+c) - 2}{\cosh^2(ax+bt+c)}\right]$$

$$= u[-\beta^2 - 2ai\beta \tanh(ax+bt+c) + a^2 - 2a^2 \operatorname{sech}^2(ax+bt+c)] \quad (3.3.1.6)$$

elde edilir.

(3.3.1.1) de bulunan u^2 terimi

$$|u|^2 = uu^\dagger$$

olarak ifade edilirse

$$|u|^2 = \alpha e^{i(\beta x+\gamma t+\epsilon)} \operatorname{sech}^2(ax+bt+c) \alpha e^{-i(\beta x+\gamma t+\epsilon)} \operatorname{sech}^2(ax+bt+c)$$

$$|u|^2 = \alpha^2 \operatorname{sech}^2(ax+bt+c) \quad (3.3.1.7)$$

elde edilir. Böylece (3.3.1.3), (3.3.1.6) ve (3.3.1.7)'de elde edilen türevler (3.3.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$iu[i\gamma - b\tanh(ax+bt+c)] + u[-\beta^2 - 2ai\beta \tanh(ax+bt+c) + a^2$$
$$-2a^2 \operatorname{sech}^2(ax+bt+c)] + 2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(ax+bt+c) u = 0 \quad (3.3.1.8)$$

bulunur. Buradan

$$-\gamma - ib\tanh(ax+bt+c) - \beta^2 - 2ai\beta \tanh(ax+bt+c) + a^2$$
$$-2a^2 \operatorname{sech}^2(ax+bt+c) + 2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(ax+bt+c) = 0$$

veya

$-\gamma-\beta^2+a^2-i\tanh(ax+bt+c)(-b-2a\beta)$
$+\mathrm{sech}^2(ax+bt+c)(-2a^2+2\alpha^2)=0$

olur. Son eşitlikten

$-\gamma-\beta^2+a^2=0$
$-b-2a\beta=0$
ve
$-2a^2+2\alpha^2=0$
olmalıdır. Buradan

$$\gamma=a^2-\beta^2 \tag{3.3.1.9}$$

$$b=-2a\beta \tag{3.3.1.10}$$

ve

$$\alpha=\pm a \tag{3.3.1.11}$$

ifadeleri elde edilir. ε ise keyfi sabittir. (3.3.1.9), (3.3.1.10) ve (3.3.1.11), (3.3.1.1) çözümünde yerine yazılırsa

$$u(x,t)=\pm ae^{i(\beta x+(a^2-b^2)t+\varepsilon)}\mathrm{sech}(ax-2a\beta t+c) \tag{3.3.1.12}$$

elde edilir.

3.3.2. N-Soliton Gösterimi

Bundan önceki iki denklemde de olduğu gibi NLS denklemi için N-soliton formülü elde edilecek ve gösterilecektir. ADV yöntemine göre N-soliton çözüm

$$u(x,t)=-2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(\mathrm{x,t})^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger} \tag{3.3.2.1}$$

ile verilir. Burada

$$\Gamma(\mathrm{x,t})=I+Q(x,t)N(x) \tag{3.3.2.2}$$

dir. (3.3.2.2)'de ki $Q(x,t)$ ve $N(x)$ ifadeleri ise

$$Q(x,t) := \int_{x}^{\infty} [e^{-A^{\dagger}s-4i(A^{\dagger})^{2}t} C^{\dagger} C e^{-As-4iA^{2}t}\, ds \tag{3.3.2.3}$$

$$N(x) := \int_{x}^{\infty} e^{-Az} B B^{\dagger} e^{-A^{\dagger}z}\, dz \tag{3.3.2.4}$$

$$Q(x,t) = e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^{2}t} Q(0,0) e^{-Ax-4iA^{2}t} \tag{3.3.2.5}$$

$$N(x) = e^{-Ax} N(0) e^{-A^{\dagger}x} \tag{3.3.2.6}$$

tanımlanır. Buradan

(3.3.2.2)- (3.3.2.4)eşitlikleri kullanılarak x ve t değişkenlerine göre türevleri alınırsa

$$\Gamma_x = Q_x N + Q N_x \tag{3.3.2.7}$$

$$\Gamma_t = Q_t N \tag{3.3.2.8}$$

$$Q_x = -A^{\dagger} e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^{2}t} Q(0,0) e^{-Ax-4iA^{2}t} - e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^{2}t} Q(0,0) e^{-Ax-4iA^{2}t} A$$

$$Q_x = -A^{\dagger} Q - QA \tag{3.3.2.9}$$

ve

$$N_x = -A e^{-Ax} N(0,0) e^{-A^{\dagger}x} - e^{-Ax} N(0,0) e^{-A^{\dagger}x} A^{\dagger}$$

$$N_x = -AN - NA^{\dagger} \tag{3.3.2.10}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde

$$Q_t = 4i[(A^{\dagger})^{2} Q - QA^{2}] \tag{3.3.2.11}$$

elde edilir. Buradan

$$\Gamma^{\dagger} = I + NQ \tag{3.3.2.12}$$

$$\Gamma^{-1}Q = Q(\Gamma^{\dagger})^{-1} \tag{3.3.2.13}$$

$$N\Gamma^{-1} = (\Gamma^{\dagger})^{-1}N \tag{3.3.2.14}$$

bulunur.

$u(x,t)$ ifadesinin x ve t değişkenine göre türevleri alınmadan önce Γ_x, ${\Gamma_x}^{-1}$ Γ_t ve ${\Gamma_t}^{-1}$ ifadeleri bulunması gerekmektedir. Buradan

$$\Gamma_t = Q_t N$$

dir. Böylece (3.3.2.11) kullanılırsa

$$\Gamma_t = 4i(A^{\dagger})^2 e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Q(0,0)e^{-Ax-4iA^2t}N$$
$$-4ie^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Q(0,0)e^{-Ax-4iA^2t}A^2N$$

elde edilir.

$$e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Q(0,0)e^{-Ax-4iA^2t}N = \Gamma - I_p \tag{3.3.2.15}$$

$$e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Qe^{-Ax-4iA^2t} = Q \tag{3.3.2.16}$$

(3.3.2.15) ve (3.3.2.16) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Gamma_t = 4i[(A^{\dagger})^2\Gamma - (A^{\dagger})^2 - QA^2N] \tag{3.3.2.17}$$

bulunur. Buradan

$$\Gamma_t^{-1} = -\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1}$$

ifadesi yardımı ile

$$\Gamma_t^{-1} = -4i[\Gamma^{-1}(A^{\dagger})^2 - \Gamma^{-1}(A^{\dagger})^2\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}QA^2N\Gamma^{-1}] \tag{3.3.2.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\Gamma_x = Q_x N + QN_x$$

$$\Gamma_x = -A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}Qe^{-Ax-4iA^2t}N - e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}QAe^{-Ax-4iA^2t}\,N$$
$$-e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}Qe^{-Ax-4iA^2t}Ae^{-Ax}Ne^{-A^{\dagger}x} - e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}Qe^{-Ax-4iA^2t}e^{-Ax}Ne^{-A^{\dagger}x}A^{\dagger}$$

$$e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}Q(0,0)e^{-Ax-4iA^2t}N = \Gamma - I_p \tag{3.3.2.19}$$

$$e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}Q(0,0)e^{-Ax-4iA^2t}e^{-Ax}N(0,0)e^{-A^{\dagger}x} = \Gamma - I_p \tag{3.3.2.20}$$

(3.3.2.19) ve (3.3.2.20) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Gamma_x = -A^{\dagger}\Gamma + A^{\dagger} - 2QAN - \Gamma A^{\dagger} + A^{\dagger}$$

elde edilir. Buradan

$$\Gamma_x^{-1} = -\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}$$

ifadesi yardımı ile

$$\Gamma_x^{-1} = \Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} \tag{3.3.2.21}$$

elde edilir. Şimdi u'nun t değişkenine göre türevi hesaplanırsa

$$u_t = -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}(\Gamma^{-1})_t e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{+} - 8iB^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}(A^{\dagger})^2C^{\dagger}$$
$$u_t = 8iB^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[-(A^{\dagger})^2 - QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger} \tag{3.3.2.22}$$

$$iu_t = 8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(A^{\dagger})^2 + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger} \tag{3.3.2.23}$$

elde edilir. Şimdi ise u'nun x değişkenine göre türevini hesaplayalım.

$$u_x = 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}A^{\dagger}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$
$$-2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[\Gamma^{-1}A^{\dagger} + A^{\dagger}\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^{\dagger}\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$

$$+2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}A^\dagger e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_x = 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[A^\dagger\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^\dagger - A^\dagger\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}$$

$$+\Gamma^{-1}A^\dagger]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_x = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \qquad (3.3.2.24)$$

elde edilir. u'nun tekrardan x değişkenine göre türevi alınırsa

$$u_{xx} = -4B^\dagger e^{-A^\dagger x}A^\dagger\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}(\Gamma^{-1})_x[A^\dagger - QAN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - Q_xAN - QAN_x]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN](\Gamma^{-1})_x e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$-4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN]\,\Gamma^{-1}A^\dagger e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_{xx} = -4B^\dagger e^{-A^\dagger x}A^\dagger\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}[\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]$$

$$[A^\dagger - QAN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - (-A^\dagger Q - QA)AN - QA(-AN - NA^\dagger)]$$

$$\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$+4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN][\,\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]$$

$$e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger - 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger - QAN]\,\Gamma^{-1}A^\dagger e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_{xx}=4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger)^2 - A^\dagger QAN - 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN + 2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger$$

$$+A^\dagger QAN + QA^2N + QA^2N + QANA^\dagger + (A^\dagger)^2 - QANA^\dagger - 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger$$

$$+2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2\,QAN\Gamma^{-1}QAN]\,\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_{xx} = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[2(A^\dagger)^2 - 4A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 4A^\dagger\Gamma^{-1}QAN + 4QAN\Gamma^{-1}A^\dagger$$

$$-4QAN\Gamma^{-1}QAN + 2QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_{xx} = 8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger)^2 - 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$+2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \qquad (3.3.2.25)$$

bulunur. Şimdi (3.3.1.1)'de ki $2|u|^2u$ ifadesini hesaplayalım

$$u^\dagger(x,t) = -2Ce^{-Ax-4iA^2t}(\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B \tag{3.3.2.26}$$

dir. Böylece

$$2|u|^2u = 2uu^+u = 2(-2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger)$$

$$(-2Ce^{-Ax-4iA^2t}(\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B)(-2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger)$$

veya

$$2|u|^2u = -16B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger Ce^{-Ax-4iA^2t}](\Gamma^\dagger)^{-1}[e^{-Ax}B$$

$$B^\dagger e^{-A^\dagger x}]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger \tag{3.3.2.27}$$

bulunur. (3.3.2.3) ve (3.3.2.4)'de ki eşitliliklere integralin 1. temel teoremi uygulanırsa koyulan bu parantezlerin içlerinin

$$-Q_x = e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger Ce^{-Ax-4iA^2t} = A^\dagger Q + QA$$

$$-N_x = e^{-Ax}BB^\dagger e^{-A^\dagger x} = AN + NA^\dagger$$

olduğu görülür. Bu bulunan ifadeler (3.3.2.27)'de yerine yazılırsa

$$2|u|^2u = -16B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger Q + QA)(\Gamma^\dagger)^{-1}(AN + NA^\dagger)]$$

$$\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger \tag{3.3.2.28}$$

elde edilir.

Şimdi (3.3.2.23), (3.3.2.25) ve (3.3.2.28) eşitlikleri (3.3.1.1)'de yerine yazılırsa

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u =$$

$$8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger)^2 + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger$$

$$+8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger)^2 - 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$+2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger$$

$$-16B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger Q + QA)(\Gamma^\dagger)^{-1}(AN + NA^\dagger)]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2t}C^\dagger$$

$$= 8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[2(A^\dagger)^2 + 2QA^2N - 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}QAN$$

$$+2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger}-2A^{\dagger}QAN-2A^{\dagger}QNA^{\dagger}+2A^{\dagger}QN\Gamma^{-1}QAN+2A^{\dagger}QN\Gamma^{-1}QNA^{\dagger}$$
$$-2QA^{2}N-2QANA^{\dagger}+2QAN\Gamma^{-1}QAN+2QAN\Gamma^{-1}QA^{\dagger}]$$
$$\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^{2}t}C^{\dagger} \tag{3.3.2.29}$$

bulunur. Buradan

$\Gamma=I+QN$

eşitliğinin her iki tarafı soldan Γ^{-1} ile çarpılırsa

$$\Gamma^{-1}\Gamma=\Gamma^{-1}I+\Gamma^{-1}QN$$

$$I=\Gamma^{-1}+\Gamma^{-1}QN$$

elde edilir. Buradan

$$I-\Gamma^{-1}=\Gamma^{-1}QN \tag{3.3.2.30}$$

bulunur. Ayrıca

$\Gamma^{\dagger}=I+NQ$

eşitliğinin her iki tarafı soldan $(\Gamma^{\dagger})^{-1}$ ile çarpılırsa

$$(\Gamma^{\dagger})^{-1}\Gamma^{\dagger}=(\Gamma^{\dagger})^{-1}+(\Gamma^{\dagger})^{-1}NQ$$

$$I=(\Gamma^{\dagger})^{-1}+(\Gamma^{\dagger})^{-1}NQ$$

$$(\Gamma^{\dagger})^{-1}=I-(\Gamma^{\dagger})^{-1}NQ \tag{3.3.2.31}$$

$$(A^{\dagger})^{2}-A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger}=A^{\dagger}[I-\Gamma^{-1}]A^{\dagger}$$
$$=A^{\dagger}QN\Gamma^{-1}A^{\dagger}$$

ya da

$$=A^{\dagger}\Gamma^{-1}QNA^{\dagger} \tag{3.3.2.32}$$

olarak bulunur. Buradan (3.3.2.12), (3.3.2.13), (3.3.2.14), (3.3.2.30), (3.3.2.31) ve (3.3.2.32) kullanılarak (3.3.2.29) tekrardan yazılırsa

$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u =$

$8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[2A^\dagger\Gamma^{-1}QNA^\dagger + 2QA^2N + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}QAN$

$+2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger - 2A^\dagger QAN - 2A^\dagger QNA^\dagger + 2A^\dagger(I-\Gamma^{-1})QAN + 2A^\dagger(I-\Gamma^{-1})QNA^\dagger$

$-2QA^2N - 2QANA^\dagger + 2QAN(I-\Gamma^{-1})A^\dagger]\,\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$

elde edilir. İşlemlere devam edilirse

$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u =$

$8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[2A^\dagger\Gamma^{-1}QNA^\dagger + 2QA^2N + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2QAN\Gamma^{-1}QAN$

$+2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger - 2A^\dagger QAN - 2A^\dagger QNA^\dagger + 2A^\dagger QAN - 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN$

$+2A^\dagger QNA^\dagger - 2A^\dagger\Gamma^{-1}QNA^\dagger - 2QA^2N - 2QANA^\dagger + 2QANA^\dagger$

$-2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger]\,\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \qquad (3.3.2.33)$

elde edilir. Böylece (3.3.2.33)’de sadeleştirmeler yapılırsa

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0$$

Sonuç olarak (3.3.2.1)’deki u çözümü lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümüdür.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde lineer olmayan integrallenebilir kısmi diferansiyel denklemlerin (KdV, mKdV, NLS) N-soliton çözümleri için basit ve kompakt formülleri elde edildi. Bu gösterim üstel matris ve üçlü A, B, C matrisleri kullanılarak ADV metodu yardımıyla elde edildi. Bu formüller herhangi soliton sayısı için kompakt olabilir ancak anlaşılması kolaydır. Ancak üçlü matris ve üstel matris kullanmaksızın çözüm formülleri çok uzun olabilir ve anlaşılması epey zor olacaktır. Bu formüllerin davranışları incelenirken matlab ve maxima programlarından yardım alınmıştır.

Solitonlar üzerindeki çalışmalar düzenli bir şekilde artmaktadır ve son bulunan bazı sonuçlar bu artışın daha da fazla olacağını göstermektedir. Bu tezde de bu sonuçlar üzerinde çalışılmaktadır. Bu çalışmaya bir örnek, Prof. Dr. Tuncay AKTOSUN ve onun çalışma arkadaşları 2010 yılında NLS denklemi için N-soliton çözümünü geliştirdiler. Bu gelişim NLS denkleminin daha genel bir gösterimi olmuştur. Bu sonucu ortaya çıkarmak için temel olarak üçlü matris ve üstel matrislerden yararlanmışlardır.

KAYNAKLAR

Ablowitz, M.J., Ramani, A. and Segur, H., 1980. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type II. Journal of Mathematics Physics, 21, 1006–15.

Ablowitz, M.J., Ramani, A. and Segur, H., 1981. Solitons and inverse scattering transform. SIAM, Philadelphia , 425 s.

Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., 1991. Solitons, nonlinear evolution equations, and inverse scattering. Cambridge University. Press, Cambridge.

Aktosun, T. and Van der Mee, C., 2006. Explicit solutions to the Korteweg-de Vries equation on the half-line Inverse Problems. 22, 2165-2174.

Aktosun, T., Demontis, F. and Van der Mee, C., 2007. Exact solutions to the focusing nonlinear Shrödinger equation, Inverse Problems. 23, 2171-2195.

Aktosun, T., 2009. Inverse scattering transform and the theory of solitons. Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer, New York, 4960-4971.

Aktosun, T., Busse, T., Demontis, F. and Van der Mee, C., 2010. Symmetries for exact solutions to the nonlinear Schrödinger equation. Journal of Mathematics Physics, A 43.

Bona, J. and Smith, R., 1975. The initial value problem for the Korteweg-de Vries Equation. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 278, 555-601.

Çulha, S., 2014. Korteweg-de Vries denkleminin bazı analitik ve yaklaşık çözümleri. Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, Türkiye, 83 s., 8-21.

Duan, W.S., Wang, B. and Wei, R., 1997. Reflction and transmission of nonlinear blood waves due to arterial branching. Journal of Mathematics Physics, 55, 1773-1778.

Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1967. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Journal of Mathematics Physics, 19, 1095-1097.

Garcia, E., 2010. Multi-solitons and nonlinear partial differential equations. Yüksek Lisans Tezi. Teksas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Teksas, ABD, 52 s., 1-32.

Hirota, R., 2004. The direct method in soliton theory. Cambridge University Prees, Cambridge.

Kametaka, Y.,1969. Korteweg-de Vries equation I. global existence of smooth solutions. Proceedings of the Japan Academy, 45, 552-555.

Kevrekidis, P.G., Khare, A. and Saxena, A., 2003. Breather lattice and its stabilization for the modified Korteweg-deVries equation. Journal of Mathematics Physics, 68,047701.

Komatsu, T.S. and Sasa, S.I., 1995. Kink soliton characterizing traffic congestion. Journal of Mathematics Physics, E. 52, 5574.

Korteweg, D.J. and De Vries, G., 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. Philosophical Magazine, 39, 422-433.

Miura, R.M. and Gardner, C., 1968. Existence of conservation laws and constants of motion. Journal of Mathematical Physics, 1204-1209.

Miura, R.M., 1976. The Korteweg-de Vries equation: a survey of results. SIAM Rev. 18, 412-459.

Novikov, S., Manakov, S.V., Pitaevskii, S.P. and Zakharov, V.E., 1984. Theory of solitons. Conultants Bureau, New York.

Ton, B.A., 1977. Initial boundary-value problems for the Korteweg-de Vries equation. Academic Press, 25, 288-309.

ÖZGEÇMİŞ

Emirhan ÖZDEMİR, 06/06/1992 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlköğretimini 2006 yılında İstanbul Mustafa Kemal Paşa İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2010 yılında İstanbul İli'nde Sabancı Lisesi'nde tamamladı. Aynı yıl başladığı lisans eğitimini Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı ve Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Harita Mühendisliği Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimlerini halen devam ettirmektedir.