T.C
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRLERİNİN SIRALI BİDUALİ

TUĞBA UZUNOĞLU

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. RUŞEN YILMAZ
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. BAHADIR ÖZGÜR GÜLER
DOÇ. DR. KADİR KUTLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

<u>RİZE-2015</u>

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRLERİNİN SIRALI BİDUALİ

Doç. Dr. Ruşen YILMAZ danışmanlığında, Tuğba UZUNOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 05/06/2015 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvan Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye	: Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER	Güler
Üye	: Doç. Dr. Kadir KUTLU	K. Kutlu

Prof. Dr. Selami ŞAŞMAZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bilimsel desteğini büyük bir sabır içerisinde tüm imkanlarıyla sunan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ruşen YILMAZ 'a, Matematik öğrenimim ve eğitimimde katkısı olan tüm hocalarıma ayrıca bana yeni ufuklar açan ve her zaman yanımda olan aileme saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Tuğba UZUNOĞLU

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan f-Cebirlerinin Sıralı Biduali başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 05/06/2015.

Tuğba UZUNOĞLU

***Uyarı**: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

f-Cebirlerinin Sıralı Biduali

Tuğba UZUNOĞLU

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ

Bu tezde Riesz cebirleri ve bu cebirlerin en önemli sınıflarından olan f-cebirlerinin temel özellikleri araştırılarak herhangi bir Archimedean f-cebirinin birim elemanlı bidualinin karakterizasyonu için yeterli ve gerekli koşullar verilmiştir.
Tez dört bölümden oluşmaktadır:
Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilerek Riesz uzaylarının temel özellikleri ve bu uzaylar üzerinde tanımlanan çeşitli operatörler incelenmektedir.
İkinci bölümde, Riesz cebirleri ve temel özellikleri ile bazı önemli sınıflar tanımlanarak bu sınıflar arasındaki ilişkiler araştırılmaktadır. Özellikle çalışmamızın temelini teşkil eden f-cebir sınıfı detaylı bir şekilde incelenip bu cebir sınıfının bidual uzayları işlenmektedir. Buna göre Bernau ve Huijsmans'ın 1995 yılında yayınlanan makalesini inceleyerek, bir Archimedean f-cebirinin bidualinin yine bir f-cebiri olduğu sonucu verilmiştir.
Üçüncü bölümde, K. Boulabiar ve J. Jaber'in 2011 yılındaki bir çalışması incelenerek Archimedean f-cebirinin birim elemanlı sıralı bidualinin karakterizasyonu için yeterli ve gerekli koşulları verilmiştir.

2015, 46 sayfa

Anahtar Kelime: Riesz uzayı, Riesz cebiri, f-cebiri, Arens çarpımı.

ABSTRACT

The Order Bidual of f-Algebras

Tuğba UZUNOĞLU

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Master Thesis
Supervisor: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ

In this thesis investigating properties of Riesz algebras and, in particular the properties of f-algebras, which is one of the most important classes, we give a necessary and sufficient condition for the characterization of order bidual with identity element of an Archimedean f-algebra.

The thesis mainly consists of four sections:

In the first section, giving main definitions and theorems, properties of Riesz spaces and some operators defined on Riesz spaces are investigated.

The second section deals with Riesz algebras, their properties and some important classes of Riesz algebras. We investigate the relationships among these classes. In particular, the class of f-algebra is studied in details. We see that the order bidual of an Archimedean f-algebra is an f-algebra (with respect to Arens multiplication), due to Huijsmans ve Bernau, study in 1995.

In the third section, studying a paper of K. Boulabiar and J. Jaber publihsed in 2011 we get the characterization of order bidual with identity element of an Archimedean f-algebra.

2015, 46 pages

Keywords: Riesz space, Riesz algebras, f-algebra, Arens multiplication.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

E^+	E sıralı vektör uzayının pozitif konisi
A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
E'	E Riesz uzayının birinci sıralı duali
E''	E Riesz uzayının ikinci sıralı duali
$(E')'_n$	E Riesz uzayının sıralı sürekli ikinci duali
$(E')'_s$	E Riesz uzayının ayrık tümleyeni
$\sigma(A)$	A Riesz uzayının A'' deki görüntüsü
$I(\sigma(A))$	$\sigma(A)$ ile üretilen sıralı ideal
N_F	F fonksiyonelinin sıfır ideali
N_F^d	N_F sıfır idealinin ayrık tümleyeni
x^+	x elemanının pozitif kısmı
x^-	x elemanının negatif kısmı
$\|x\|$	x elemanının mutlak değeri
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\vee$	Supremum
$\wedge$	İnfimum
$\perp$	Diktir
$\subset$	Alt küme
$\downarrow$	Aşağı yönlü
$\oplus$	Direkt toplam
$[\,,\,]$	Sıralı aralık

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İlk olarak Riesz uzayı veya vektör latisi olarak da adlandırılan latis sıralı vektör uzayının tarihi, Rieszs'e ve 1928'de gerçekleştirilen Bologna'da ki Uluslararası Matematik Kongresi'ne dayanmaktadır. Riesz cebirleri veya latis sıralı cebirlerinin en önemli sınıflarından olan *f*-cebirleri, $\sigma -$Dedekind tam sıralı vektör uzayı için 1950'de Nakano (Nakano, 1950) tarafından başlatılmıştır. 1953'te Amemiya (Amemiya, 1953) ve 1956'da Birkhoff ve Pierce (Birkhoff ve Pierce, 1956) tarafından bugünkü tanımı ortaya konuldu. Genel olarak Riesz cebirlerinin ilk tanımının tarihini kesin olarak söylemek zordur. Fakat yukarıdaki üç tarih etrafında bir zamanda olduğu söylenebilir. Gerçekten, Birkhoff'un 1950'deki görüşü Cambridge'deki Uluslararası Matematik Kongresini göstermektedir. Frink, ortalama veya Reynold operatörleri olarak adlandırılan latis sıralı halkasının genel bir araştırmasının çalışılmaya ihtiyaç duyulduğunu gözlemlemektedir. Latis sıralı grupları hakkındaki görüşlerin sonunda, Birkhoff'un kendisi tarafından, listelenmiş problem formunda latis sıralı halkalarına ihtiyacı rafa kaldırmıştır. Böylece Riesz cebirleri ve f-cebirlerinin ortalama operatörler çalışmasını içeren katsayı köklerine sahip olduğu görülür ki bizzat akıcı mekaniğin problemlerinden ileri çıkmıştır. Aynı zamanda f-halkaları ve f-cebirlerinin ortaya çıkışı tarihi gelişimi üzerine ortak fikirle sonuçlanmamıştır. Latis sıralı gruplarının gelişimi, Riesz uzayının gelişimine benzer şekildedir. Riesz uzayları analizcilerin ilgisini çekerken, latis sıralı gruplarının cebirciler tarafından daha geniş bir şekilde araştırıldığı görülmüştür. *f*-halkaları üzerine en iyi çalışmalardan biri 1995 yılında Henrikson tarafından yapıldı. Tarihsel olarak *f*-cebir teorisinin yeniden gündeme getirilmesi Lüxemburg tarafından Alkansas ders notlarında ve 1982'de Pagter'in doktora tez çalışmasında ciddi olarak ele alınmıştır. f-cebirleri alanındaki diğer bir araştırma, vektör latisleri için Seçme Aksiyomlarını kullanmaksızın, Riesz uzayları teorisinde birçok temel sonuçları ispatlamak için bir program geliştirilmesini isteyen Zaanen tarafından başlatılmıştır. Bu araştırmaların birçoğu Huijsmans (Huijsmans, 1991) tarafından güncelleştirilmiştir. Huijsmans'ın çalışmasından beri çok fazla gelişme sağlandı ve (Huijsmans, 1991)'de anlatılan bazı problemler çözüldü. Aynı zamanda (Huijsmans, 1991)'de ideal teori, Riesz homomorfizması ve cebir homomorfizması arasındaki bağlantılar ve f-cebirlerinin gösterimi gibi konular eksikti. Bu nedenle Boulabiar, Buskes ve Triki Huijsmans'ın Riesz cebirleri ve f-cebirleri üzerindeki araştırma çalışması (Huijsmans, 1991)'i güncelleştirip genelleştirerek 2003'te ortak bir araştırma çalışmasını yayınladılar (Buskes, Boulabiar ve Triki, 2003). Ayrıca, Riesz uzayları ve f-cebirleri özellikleri üzerine daha fazla bilgi için W. Filter'in araştırma çalışması (Filter, 1994) ile C. B. Huijmans, F. Beukers ve B. de Pagter'in (Huijsmans, Beukers ve Pagter 1983), C. B. Huijmans ve B. de Pagter'in (Huijsmans ve Pagter, 1982) ve (Huijsmans ve Pagter, 1984) makaleleri okuyucunun başvurabileceği temel kaynaklardan bazılarıdır.

Bu çalışmamızda (Aliprantis ve Burkinshow, 1985), (Aliprantis ve Burkinshow, 2006), (Birkhoff, 1987), (Luxsemburg ve Zaanen, 1971), (Zaanen, 1983) standart kitapları ve (Birkhoff ve Pierce, 1956), (Huijsmans, 1991), (Huijsmans ve Pagter, 1982), (Huijsmans ve Pagter, 1984), (Buskes, Boulabiar ve Triki, 2003), (Boulabiar ve Jaber, 2011) makaleleri ile (Pagter, 1984) ve (Yılmaz, 2001) tezleri temel kaynak olarak almaktayız.

1.2. Riesz Uzayları

Tanım 1.1.1. $\emptyset \neq E$ bir küme olsun. E üzerinde tanımlı $"\leq"$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $"\leq"$ bağıntısına *(kısmi) sıralama bağıntısı* ve $(E, \leq)$ ikilisine *(kısmi) sıralı küme* denir.

1) $\forall x \in E$ için $x \leq x$ *yansıma özelliği*

2) $\forall x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$ *ters simetri özelliği*

3) $\forall x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ *geçişme özelliği*

Tanım 1.1.2. E bir reel (gerçel) vektör uzayı ve $" \leq "$ E üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olmak üzere,

1) $\forall x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$

2) $\forall x, y \in E$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

koşullarını sağlayan $(E, \leq)$ ikilisine *sıralı vektör uzayı* denir.

Tanım 1.1.3. E bir sıralı vektör uzayı olmak üzere

$E^+ = \{x \in E : 0 \leq x\}$

kümesine E nin *pozitif konisi*, E^+ nın elemanlarına da E nin *pozitif elemanları* denir.

Tanım 1.1.4. E bir kısmi sıralı vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in E$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu (infimumu) varsa yani

$\sup\{x, y\} = x \vee y$ $\quad$ $(\inf\{x, y\} = x \wedge y)$

ise E'ye *Riesz uzayı* veya *latis vektör uzayı* kısaca $l - uzayı$ denir.

Tanım 1.1.5. E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere,

1) $x^+ = x \vee 0$ elemanına x in *pozitif kısmı*,

2) $x^- = (-x) \vee 0$ elemanına x in *negatif kısmı*,

3) $|x| = x \vee (-x)$ elemanına x in *modülü (mutlak değeri)* denir.

Tanım 1.1.6. E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

1) $x = x^+ - x^-$.

2) $|x| = x^+ + x^-$.

3) $x^+ \wedge x^- = 0$.

Teorem 1.1.7. E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

2) $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$.

3) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}\big||x + y| + |x - y|\big|$.

4) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\big||x+y| - |x-y|\big|$.

5) $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$, $z = x^-$.

Teorem 1.1.8. E bir Riesz uzayı $x, y, z \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

2) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$.

3) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$.

Tanım 1.1.9. E bir Riesz uzayı olsun. E deki sıralama bağıntısıyla $V \subset E$ bir vektör (lineer) alt uzayı olsun. $\forall f, g \in V$ için

$f \vee g, f \wedge g \in V$

ise V ye E nin bir *Riesz alt uzayı* ya da *alt vektör latisi* denir. (Burada E bir Riesz uzayı olduğundan f ve g nin supremumu var olup E nin elemanıdır). Kısaca V vektör alt uzayı E den indirgenen sıralama bağıntısına göre kendi kendine bir Riesz uzayıdır.

Tanım 1.1.10. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in E^+$ için

$n^{-1}x \downarrow 0$ yani $\inf\{n^{-1}x : n = 1, 2, \ldots\} = 0$

sağlanıyorsa E Riesz uzayına *Archimedean*'dir denir.

Tanım 1.1.11. E bir Riesz uzayı ve $A \subset E$ olsun,

1) Eğer $g \in E$ olmak üzere $f \in A$ ve $|g| \leq |f|$ olduğunda $g \in A$ sağlanıyorsa A ya *solid* denir.

2) A bir solid lineer alt uzayı ise A ya E de bir *ideal* veya *sıralı ideal* denir.

3) A bir ideal ve $\forall B \subset A$ için $supB \in E$ olması durumunda $supB \in A$ sağlanıyorsa A ya bir *band* denir.

Tanım 1.1.12. $x \in E$ vektörü tarafından üretilen ideal

$E_x = \{y \in E : \exists \lambda > 0, |y| \leq \lambda |x|\}$

olarak tanımlanır ve bu ideale bir *esas ideal* denir.

Tanım 1.1.13. E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Eğer

$|x| \wedge |y| = 0$

ise *x ile y birbirine diktir* denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. $\emptyset \neq A \subset E$ olmak üzere,

$A^d = \{x \in E : \forall y \in A \text{ için } x \perp y\}$

kümesine A nın bir *ayrık tümleci* denir.

Tanım 1.1.14. Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı her alt kümesinin infimumu varsa bu uzaya bir *Dedekind tam Riesz uzayı* denir.

Tanım 1.1.15. E bir Riesz uzayı olsun. $x, y \in E$ için

$x \leq y$

ise $[x, y]$ aralığına bir *sıralı aralık* denir ve

$[x, y] = \{z \in E: x \leq z \leq y\}$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.16. Bir A kümesi hem üstten hem de alttan sınırlıysa yani sıralı aralık içinde kalıyorsa A ya bir *sıralı sınırlı küme* denir.

Tanım 1.1.17. E bir Riesz uzayı ve $V \subset E$ bir Riesz alt uzayı olsun. $\forall 0 < x \in E$ için

$0 < y \leq x$

sıralamasını sağlayan bir $y \in V$ varsa V ye E içerisinde *sıralı yoğun* denir.

1.3. Operatörler ve Riesz Homomorfizmaları

Tanım 1.2.1. E ve F iki vektör uzayı ve $T: E \to F$ bir dönüşüm olsun.

$\forall x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$

2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

koşulları sağlanıyorsa T ye bir *lineer dönüşüm* veya *operatör* denir. $T(x)$ yerine bazen Tx yazılır.

Tanım 1.2.2. E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere E den F ye tanımlanan bütün lineer dönüşümlerin kümesi $L(E, F)$ ile gösterilir, yani

$L(E, F) \coloneqq \{T: E \to F$ lineer dönüşüm$\}$.

Operatörlerin toplam ve skaler çarpımına göre, başka bir ifade ile

1) $\forall T_1, T_2 \in L(E, F)$ için $T_1 + T_2 \in L(E, F)$

2) $\forall T \in L(E, F)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha T \in L(E, F)$

olduğundan $L(E, F)$ bir reel vektör uzayıdır.

Üstelik $\forall T, S \in L(E, F)$ için $S \leq T \Leftrightarrow 0 \leq T - S$ şeklinde tanımlanan " $\leq$ " sıralama bağıntısına göre $L(E, F)$ bir sıralı vektör uzaydır.

Tanım 1.2.3. E ve F iki sıralı reel vektör uzayı ve $T: E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun.

$\forall 0 \leq x \in E$ için

$0 \leq Tx \in F$

sağlanıyorsa T operatörüne bir *pozitif lineer operatör* veya *pozitif operatör* denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.4. $T: E \to F$ bir pozitif operatör olsun. $\forall x \in E^{+}$ için

$T[0, x] = [0, Tx]$

oluyorsa T operatörüne *aralık koruyandır* denir.

Tanım 1.2.5. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir operatör olmak üzere, $\forall f, g \in E$ için

$T(f \vee g) = Tf \vee Tg$

sağlanıyorsa T'ye bir *Riesz homomorfizması* denir.

Her Riesz homomorfizması pozitiftir. Gerçekten;

$Tf = T(f \vee 0) = Tf \vee T0 = Tf \vee 0 = (Tf)^{+} \geq 0.$

Teorem 1.2.6. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) T Riesz homomorfizmasıdır.

2) $\forall f, g \in E$ için $T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg$.

3) $\forall f, g \in E$ ve $f \wedge g = 0$ ise $Tf \wedge Tg = 0$.

4) $\forall f \in E$, $|Tf| = T(|f|)$.

5) $\forall f \in E$, $T(f^{+}) = (Tf)^{+}$.

6) $\forall f \in E$, $T(f^{-}) = (Tf)^{-}$.

1.4. Sıralı Operatörler

Tanım 1.3.1. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir operatör olsun. Eğer T, E nin her sıralı sınırlı alt kümesini F nin sıralı sınırlı alt kümesine resmediyorsa T operatörüne bir *sıralı sınırlı operatör* denir.

Bütün sıralı sınırlı bütün operatörlerin oluşturduğu vektör uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir.

$L_b(E, F) := \{T \in L(E, F): T$ sıralı sınırlı operatör$\}$.

$T \in L_b(E, F)$ iki pozitif operatörünün farkı şeklinde yazılabiliyorsa T ye bir *regüler (düzenli) operatör* denir. Bütün regüler operatörlerin uzayı $L_r(E, F)$ ile gösterilir. O halde

$T \in L_r(E,F) \Leftrightarrow \exists T_1, T_2 : E \to F$ pozitif operatör: $T = T_1 - T_2$.

Kolayca görülüyor ki; her pozitif operatör sıralı sınırlıdır. Sonuç olarak $L_r(E,F) \subsetneq L_b(E,F) \subsetneq L(E,F)$.

F nin bir Dedekind tam Riesz uzayı olması durumunda $L_r(E,F) = L_b(E,F)$ olup $L_b(E,F)$ bir Riesz uzayıdır.

Teorem 1.3.2. E, F iki Riesz uzayı olmak üzere, $T \in L(E,F)$ için

$|T| = (-T) \vee T$

mevcut ise $|T|$ ye T nin *modülü* denir ve $\forall x \in E^+$

$|T|(x) = \sup\{|T_y| : |y| \leq x\}$

sağlanır.

Teorem 1.3.3 (Kantorovich). E ve F iki Archimedean Riesz uzayları olsun. $T: E^+ \to F^+$ toplamsal, yani $\forall x, y \in E^+$ için

$T(x+y) = T(x) + T(y)$

ise tek olarak yine T ile gösterilen $T: E \to F$ pozitif genişlemesi mevcut olup $\forall x \in E$ için

$T(x) = T(x^+) - T(x^-)$

sağlanır.

Teorem 1.3.4 (Riesz-Kontorovich). E bir Riesz uzayı ve F bir Dedekind tam Riesz uzayı ise sıralı vektör uzayı $L_b(E,F)$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır. Bu durumda $T, S \in L_b(E,F)$ ve $x \in E^+$ için

$|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$

$(S \vee T)(x) = \sup\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$

$(S \wedge T)(x) = \inf\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$.

Tanım 1.3.5. E bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha) \subset E$ bir ağ olsun. Bir $x \in E$ için $|x - x_\alpha| \leq y_\alpha$ olacak şekilde $(y_\alpha) \downarrow 0$ özelliğini sağlayan bir $(y_\alpha) \subset E$ mevcutsa (x_α) ağı x'e *sıralı yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{s} x$ veya kısaca $x_\alpha \to x$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.3.6. E, F iki Riesz uzayı olmak üzere $T: E \to F$ operatörüne E'deki $x_\alpha \xrightarrow{s} x$ şeklindeki $\forall (x_\alpha) \subset E$ için F'de $Tx_\alpha \xrightarrow{s} Tx$ sağlanıyorsa T'ye bir *sıralı sürekli operatör* denir. Bütün sıralı sınırlı sıralı sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E,F)$ ile gösterilir. O halde,

$L_n(E,F) := \{T \in L_b(E,F): T$ sıralı sürekli$\}$.

Tanım 1.3.7. E bir Riesz uzayı olmak üzere,

1. E üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nin *birinci sıralı duali* denir ve E' ile gösterilir, yani

$E' := \{f | f: E \to \mathbb{R}$ bir lineer sıralı sınırlı fonksiyonel$\} = L_b(E, \mathbb{R})$.

2. E' üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nin *ikinci sıralı duali* denir ve E'' ile gösterilir. E'', E' nin sıralı dualidir.

$E'' := \{F | F: E' \to \mathbb{R}$ bir lineer (sıralı) sınırlı fonksiyonel$\}$.

E bir Riesz uzayı ise E' de bir Riesz uzayıdır. Ayrıca, E nin sıralı sürekli ikinci duali $(E')'_n$ ile gösterilir.

$(E')'_n := \{f \in E'' | F: E \to \mathbb{R}$ bir sıralı sürekli lineer fonksiyonel$\}$.

E'' deki ayrık tümleci $(E')'_s$ ile gösterilir.

$(E')'_n$ E' deki bütün sıralı sınırlı sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin bandı ve $(E')'_s$ de bütün sıralı sınırlı tekil fonksiyonellerin bir bandıdır.

E'' Dedekind tam olduğundan $E'' = (E')'_n \oplus (E')'_s$ bir sıralı direkt toplamdır. Her Dedekind tam vektör latisi bir band olduğundan $(E')'_n$ ve $(E')'_s$ birer Dedekind tam vektör latisleridir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Riesz Cebirlerinin Sıralı Biduali

E bir Riesz uzayı olmak üzere E' bir Dedekind tam (böylece Archimedean) Riesz uzayıdır. $\forall x \in E$ için $x'' \in E''$ olup ve $\forall f \in E'$ için
$x''(f) = f(x)$ olmak üzere
$\sigma(x) = x''$
ile tanımlanan $\sigma: E \to E''$ dönüşümü bir Riesz homomorfizmasıdır (Zaanen,1983). Bununla birlikte E', E nın noktalarını ayırıyorsa, yani
$\forall x \in E$ için $\exists f \in E': f(x) \neq 0$
ise σ dönüşümü bire-birdir ve bu durumda E, E'' nin Riesz alt uzayı olan $\sigma(E)$ ile özdeş olur. E' Dedekind tam olduğundan E'' Dedekind tam Riesz uzayı olduğu açıktır. Bir sonraki bölümde E nın bir Riesz cebir olması durumunda E'' nin cebirsel yapısı üzerinde duracağız.

2.1.1. Riesz Cebirleri

Tanım 2.1.1. A bir Riesz uzayı olsun. Eğer, aynı zamanda, A bir birleşmeli cebir ve $\forall 0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq x \cdot y \in A$ ise A ya bir *Riesz cebiri (sıralı latis cebir* veya kısaca *l-cebiri)* denir.

Tanım 2.1.2. A bir Riesz cebiri olsun. $\forall x \in A$ için $x \cdot x = x^2 \in A^+$ ise A ya *pozitif kareli* veya *pozitif kare özelliğine sahiptir* denir.

Tanım 2.1.3. A bir Riesz cebiri olsun. $x \in A$ için
$\exists k \in \mathbb{N}: x^k = 0 \Rightarrow x = 0$
özelliğini sağlıyorsa A ya *yarı-asal* denir.

Teorem 2.1.4. A bir Riesz cebiri ise aşağıdaki özellikler sağlanır. $\forall x, y \in A$ için

1) $x \leq y$ ise $\forall z \in A^+$ için $xz \leq yz$ ve $zx \leq zy$.

2) $0 \leq x \leq y$ ve $0 \leq u \leq v$ $(u, v \in A)$ ise $0 \leq xu \leq yv$.

3) $\forall z \in A^+$ için $z(x \vee y) \geq zx \vee zy$.

4) $\forall z \in A^+$ için $(x \vee y)z \geq xz \vee yz$.

5) $\forall z \in A^+$ için $z(x \wedge y) \leq zx \wedge zy$.

6) $\forall z \in A^+$ için $(x \wedge y)z \leq xz \wedge yz$.

7) $(xy)^+ \leq x^+y^+ + x^-y^-$.

8) $(xy)^- \leq x^+y^- + x^-y^+$.

9) $|xy| \leq |x||y|$.

Tanım 2.1.5. A bir Riesz cebiri $x, y \in A$ ve $x \wedge y = 0$ olsun.

1) $\forall 0 \leq z \in A$ için $xz \wedge y = 0 = zx \wedge y$ ise A ya bir f*-cebiri*,

2) $xy = 0$ ise A ya bir *hemen hemen* f*-cebiri*,

3) $\forall 0 \leq z \in A$ için $xz \wedge yz = 0$ ise A ya bir *sağ* d*-cebiri*, $zx \wedge zy = 0$ ise A ya bir *sol* d*-cebiri*,

4) A hem sağ hem de sol d-cebiri ise A ya d*-cebiri* denir.

f-cebirleri ilk kez Nakano tarafından 1950'de yarı–normal l-cebiri olarak tanımlanmıştır (Nakano,1950) ve makalede cebirin $\sigma-$Dedekind tam olduğu kabul edilmiştir. 1953'te bu özellik Amemiya tarafından kaldırılmıştır (Amemiya, 1953). Bu çalışmada bu cebir sınıflarının tanımları Birkoff ve Pierce'nin 1956'daki bir makalesinde tanımlamış olduğu şekliyle göz önüne alınacaktır (Birkoff ve Pierce, 1956). Hemen hemen f-cebirleri Birkhoff tarafından 1967'de tanımlanmıştır (Birkhoff, 1967) ve Banach hemen hemen f-cebirleri Scheffold tarafından genişçe çalışılmıştır (Scheffold, 1981). d-cebirleri Kudlacek tarafından 1967'de tanımlanmıştır (Kudlacek and Nektery, 1962).

Teorem 2.1.6. A bir Riesz cebiri olsun. Bu durumda,

1. Her f-cebiri hemen hemen f-cebiridir.

2. Her f-cebiri d-cebiridir.

İspat:

1. A bir f-cebiri olmak üzere $x, y \in A$ ve $x \wedge y = 0$ olsun. Burada $x, y \in A^+$ olup A bir Riesz cebiri olduğundan $x \cdot y \geq 0$. Buradan

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow y \wedge x = 0$$

$$\xRightarrow{f-cebiri} xy \wedge x = 0$$

$$\xRightarrow{f-cebiri} xy \wedge xy = 0$$

$$\Rightarrow \inf\{xy, xy\} = xy$$

$$\Rightarrow xy = 0$$

olduğundan A hemen hemen f-cebiridir.

2. A bir f-cebiri ve $x \wedge y = 0$ olsun. $\forall z \in A^+$ için

$$zx \wedge y = 0 \xRightarrow{f-cebiri} zx \wedge zy = 0.$$

Benzer şekilde $\forall z \in A^+$ için

$$x \wedge y = 0 \xRightarrow{f-cebiri} xz \wedge y = 0$$

$$\xRightarrow{f-cebiri} xz \wedge yz = 0$$

olduğundan A bir d-cebiridir.

Örnek 2.1.7. $A = \mathbb{R}^2$ olsun. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in A$ için

$$xy = (x_1y_1, x_2y_2)$$

işlemine göre A bir hemen hemen f-cebiri, d-cebiri ve hatta f-cebiridir.

Örnek 2.1.8. $A = \mathbb{R}^3$ olsun. $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in A$ için

$$xy = (x_2y_2 + x_3y_3, x_2y_2, x_3y_3)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemine göre A bir hemen hemen f-cebiridir fakat d-cebiri değildir.

Teorem 2.1.9. A bir f-cebiri ise aşağıdakiler sağlanır. $\forall x, y \in A$ için

1. $\forall z \in A^+$ için $z(x \wedge y) = zx \wedge zy$.

2. $\forall z \in A^+$ için $z(x \vee y) = zx \vee zy$.

3. $\forall z \in A^+$ için $(x \wedge y)z = xz \wedge yz$.

4. $\forall z \in A^+$ için $(x \vee y)z = xz \vee yz$.

5. $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$.

6. $|xy| = |x||y|$.

7. $x \perp y$ ise $\forall z \in A$ için $zx \perp y$ ve $xz \perp y$.

8. $x \perp y$ ise $xy = 0$ ve özel olarak; $x^+x^- = x^-x^+ = 0$.

9. $\forall x \in A, x^2 \geq 0$ ve üstelik $xx^+ = x^+x = x^2 \geq 0$.

10. $\forall x, yA^+$ için $x^2 \vee y^2 \geq xy \vee yx$.

11. $\forall x, y \in A^+$ için $x^2 \wedge y^2 \leq xy \wedge yx$.

12. $\forall x, y \in A^+$ için $x^2 \wedge y^2 = (x \wedge y)^2$.

13. $\forall x, y \in A^+$ için $x^2 \vee y^2 = (x \vee y)^2$.

İspat:

1. $x, y \in A$ ve $z \in A^+$ olsun.

$0 = x \wedge y - x \wedge y$ olduğundan dağılma özelliğinden

$0 = (x - x \wedge y) \wedge (y - x \wedge y)$.

A bir f-cebiri ve $z \in A^+$ olduğundan

$(x - x \wedge y)z \wedge (y - x \wedge y) = 0.$

$\Rightarrow (xz - (x \wedge y)z) \wedge (y - x \wedge y) = 0.$

Tekrar A nın bir f-cebiri olduğu kullanılarak

$(xz - (x \wedge y)z) \wedge (y - x \wedge y)z = 0.$

$\Rightarrow (xz - (x \wedge y)z) \wedge (yz - (x \wedge y)z) = 0.$

$\Rightarrow xz \wedge yz - (x \wedge y)z = 0.$

$\Rightarrow xz \wedge yz = (x \wedge y)z.$

2., **3**. ve **4**. ispatları benzer şekilde yapılır.

5. $x, y \in A$ olsun. Buradan

$y = y^+ - y^-$ ve $y^+ \wedge y^- = 0.$

A bir f-cebiri olduğundan

$x^+y^+ \wedge y^- = 0.$

$x^+y^+ \wedge x^+y^- = 0$

$\Rightarrow x^+y^+ \perp x^+y^-.$

Benzer şekilde

$y^+x^+ \wedge y^- = 0$ ve $y^+x^+ \wedge x^-y^- = 0,$

$\Rightarrow y^+x^+ \perp x^-y^-.$

$\Rightarrow x^-y^- \perp y^+x^+.$

$y^+ \wedge y^- = 0$

$\Rightarrow y^- \wedge y^+ = 0$

$\Rightarrow x^-y^- \wedge y^+ = 0$

$\Rightarrow x^-y^- \wedge x^-y^+ = 0$

$\Rightarrow x^-y^- \perp x^-y^+.$

Buradan

$x^+y^+ + x^-y^- \perp x^+y^- + x^-y^+.$

$\Rightarrow (x^+y^+ + x^-y^-) \wedge (x^+y^- + x^-y^+) = 0.$

$\forall x, y \in A$ ise $xy \in A$ olduğundan

$xy = (xy)^+ - (xy)^-.$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} xy &= (x^+ - x^-)(y^+ - y^-) \\ &= x^+y^+ - x^+y^- - x^-y^+ + x^-y^-. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow xy = (x^+y^+ + x^-y^-) - (x^+y^- + x^-y^+)$.

Buradan Riesz ayrışım teoreminden

$(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$

olmak zorundadır.

6. $|xy| = (xy)^+ + (xy)^-$ yazabiliriz.

$\Longrightarrow |xy| = (x^+y^+ + x^-y^-) + (x^+y^- + x^-y^+)$

$= (x^+ + x^-)(y^+ + y^-) = |x||y|$

$\Longrightarrow |xy| = |x||y|$.

7. $x, y \in A$ ve $x \perp y$ olsun.

$z \in A$ ise $|z| \in A^+$ olur.

$x \perp y \Longrightarrow |x| \wedge |y| = 0$

olduğundan ve f-cebiri özelliğinden

$|z||x| \wedge |y| = 0$

$\Longrightarrow |zx| \wedge |y| = 0$

$\Longleftrightarrow zx \perp y$.

Benzer şekilde

$|x||z| \wedge |y| = 0 \Longleftrightarrow |zx| \wedge |y| = 0 \Longleftrightarrow xz \perp y$

elde edilir.

8. $x, y \in A$ ve $x \perp y$ olsun. 7'den dolayı

$x \perp y \Longrightarrow xy \perp y \Longrightarrow xy \perp xy \Longleftrightarrow |xy| \wedge |xy| = 0$

$\Longrightarrow |xy| = 0 \Longleftrightarrow xy = 0$.

Özel olarak,

$x^+ \wedge x^- = 0$ olduğundan

$x^+x^- = x^-x^+ = 0$.

9. $x \in A$ olsun.

$x = x^+ - x^-$ olduğundan

$x^2 = (x^+ - x^-)(x^+ - x^-)$

$= (x^+)^2 - x^+x^- - x^-x^+ + (x^-)^2$

$= (x^+)^2 + (x^-)^2 \geq 0$

$\Longrightarrow x^2 \geq 0$.

Üstelik

$xx^+ = (x^+ - x^-)x^+$

$= (x^+)^2 - x^- x^+$

$= (x^+)^2 \geq 0$

$x^+ x = x^+(x^+ - x^-)$

$= (x^+)^2 - x^+ x^-$

$= (x^+)^2 \geq 0$

$\Longrightarrow xx^+ = x^+ x = (x^+)^2 \geq 0.$

10. $x^2 \vee y^2 \geq xy \vee yx$

$(x-y)^+ \wedge (x-y)^- = 0$

$\Longrightarrow (x-y)^+ \wedge (y-x)^+ = 0$

$y \in A^+$ ve A bir f-cebiri olduğundan

$(x-y)^+ y \wedge (y-x)^+ = 0.$

$\Longrightarrow (x-y)^+ y \wedge x(y-x)^+ = 0.$

$\Longrightarrow (xy - y^2)^+ \wedge (xy - x^2)^+ = 0.$

$\Longrightarrow \left((xy - y^2) \wedge (xy - x^2)\right) \vee 0 = 0.$

$\Longrightarrow (xy - y^2) \wedge (xy - x^2) \leq 0.$

$\Longrightarrow xy - (y^2 \vee x^2) \leq 0.$

$\Longrightarrow xy \leq x^2 \vee y^2.$

$\Longrightarrow x^2 \vee y^2 \geq xy.$

$\Longrightarrow y^2 \vee x^2 \geq yx.$

$\Longrightarrow x^2 \vee y^2 \geq yx$

ve buradan

$x^2 \vee y^2 \geq xy \vee yx.$

11'in ispatı benzer şekilde yapılır.

12. $(x \wedge y)^2 = (x \wedge y)(x \wedge y)$

$= (x \wedge y)x \wedge (x \wedge y)y$

$= x^2 \wedge yx \wedge xy \wedge y^2$

$= (x^2 \wedge y^2) \wedge (xy \wedge yx)$

$= x^2 \wedge y^2.$

13'ün ispatı benzer şekilde yapılır.

Aşağıdaki teorem ilk olarak 1956 yılında Birkhoff ve Pierce (Birkhoff ve Pierce, 1956) ve daha sonra 1953 yılında otomorfizmalar yardımıyla, Zaanen (Zaanen, 1953) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.10. Archimedean f-cebirleri otomatik olarak hem değişmeli hem de birleşmelidir.

Daha genel olarak, yukarıdaki önemli teorem 1990 yılında Bernau ve Huijsmans tarafından hemen hemen f-cebirleri için ispatlanmıştır (Bernau ve Huijsmans, 1990). Archimedean d-cebirlerinin değişmeli olması gerekmediği gibi pozitif kareli olması da gerekmez. Değişmeli Archimedean d-cebirleri veya pozitif kareli Archimedean d-cebirleri hemen hemen f-cebirleridir. Birimli veya yarı-asal Archimedean hemen hemen f-cebirleri ve Archimedean d-cebirleri f-cebiridir (Bernau ve Huijmans, 1990).

2.1.2. Arens Çarpımı

Bu bölümde Archimedean Riesz cebirlerinin biduali üzerinde tanımlanan Arens çarpımları (Arens, 1951; 1951) üzerinde duracağız. Burada Bernau ve Huijsmans'ın 1995 ylında yayınlanan makalesini temel alacağız (Huijsmans ve Bernau, 1995).

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe, A yı Archimedean bir Riesz cebiri A' ve A'' uzaylarını daha önce açıkladığımız gibi, sırasıyla, A nın birinci sıralı duali ve ikinci sıralı duali olarak göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.2.1. A'' de üç adımda sırasıyla *birinci ve ikinci Arens çarpımları* olarak adlandırılan çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall x, y \in A, \forall f \in A'$ ve $\forall F, G \in A''$ için

1) $(f \cdot x)(y) = f(xy)$, $\quad f \cdot x \in A'$

$(G \cdot f)(x) = G(f \cdot x)$, $\quad G \cdot f \in A'$

$(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f)$, $\quad F \cdot G \in A''$

2) $(x \circ f)(y) = f(yx)$, $\quad f \circ x \in A'$

$(f \circ G)(x) = G(x \circ f)$, $\quad G \circ f \in A'$

$(F \circ G)(f) = G(f \circ F)$, $\quad F \circ G \in A''$

Biz bu tezimizde birinci Arens çarpımı ile çalışacağız. Benzer işlemler ikinci Arens çarpımı ile de yapılabilir.

A'' nin Arens çarpımına göre bir Riesz cebiri olduğu

$(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f)$

eşitliğinden kolaylıkla görülür. A değişmeli olsa bile A'' nin değişmeli olması gerekmez. Yukarıda tanımlanan σ bir Riesz homomorfizması aynı zamanda cebir homomorfizmasıdır. Dolayısıyla A', A nın noktalarını ayırdığı zaman A yı A'' nin $\sigma(A)$ alt latis cebiri ile özdeşleyebiliriz. Ayrıca $\sigma(A) \subset (A')'_n$ olduğu açıktır.

A değişmeli Riesz cebiri ise, $\forall x \in A$ ve $f \in A'$ için

$x'' \cdot f = f \cdot x.$

Gerçekten, $\forall y \in A$ için

$$\begin{aligned}(x'' \cdot f)(y) &= x''(f \cdot y) = (f \cdot y)(x) \\ &= f(yx) = f(xy) \\ &= (f \cdot x)(y)\end{aligned}$$

ve ayrıca $\forall x \in A$ ve $F \in A''$ için

$x'' \cdot F = F \cdot x''.$

Çünkü, $\forall f \in A'$ için

$$\begin{aligned}(x'' \cdot F)(f) &= x''(F \cdot f) = (F \cdot f)(x) \\ &= F(f \cdot x) = F(x'' \cdot f) \\ &= (F \cdot x'')(f).\end{aligned}$$

A bir Riesz uzayı ve $\sigma(A) = \{x'' : x \in A\}$ ise Nakano'nun iyi bilinen bir sonucuna göre $(A')'_n$ nın $\sigma(A)$ ile üretilen sıralı ideal

$I(\sigma(A)) = \{F \in (A')'_n : |F| \leq x'', \exists x \in A^+\}$

$(A')'_n$ de sıralı yoğundur (Meyer-Nieberg 1991). Bu

$\forall 0 \leq F \in (A')'_n$ için $0 < G \leq F$

özelliğini sağlayan bir $G \in I(\sigma(A))$ var olması demektir. Denk olarak, $F_\alpha \uparrow F$ özelliğini sağlayan bir $0 < F_\alpha \in I(\sigma(A))$ ağı vardır.

Tanım 2.2.2. $F \in A''$ için $N_f = \{f \in A' : |F|(|f|) = 0\}$

kümesine F nin *mutlak çekirdeği* veya *sıfır ideali* denir.

Teorem 2.2.3. A' bir sıralı ideal olup $N_F = N_{|F|} = N_{F^+} \cap N_{F^-}$. Eğer, $F \in (A')'_n$ ise N_F, A da bir banddır. $C_F = N_F^d$' nin ayrık tümleci A' de bir banddır.

Sonuç 2.2.4. $G, H \in (A')'_n$, $G \perp H$ ve $0 \leq f \in A'$ ise $g, h \in A' : f = g + h, g \wedge h = 0$ ve $G(g) = 0 = H(h)$.

2.1.3. f-Cebirlerinin Sıralı Sürekli ve Sıralı Sınırlı Bidualleri

Riesz cebirlerinin bidualleri ilk olarak 1984 yılında Pagter ve Huijsmans tarafından göz önüne alınmış ve belli şartlar altında bir Archimedean f-cebirinin sıralı bidualinin yine bir Archimedean f-cebiri olduğunu ispatlamıştır (Huijsmans, 1984). 1989'da bu sonuç Huijsmans tarafından herhangi bir Archimedean f-cebiri için genellemiştir (Huijsmans, 1989). 1995'te, yine Bernau ve Huijsmans sonuçları genelleyerek Archimedean hemen hemen f-cebirleri için ispatlanmışlardır (Bernau and Huijsmans, 1995). Ayrıca bu çalışmada bir Archimedean d-cebirinin sıralı sürekli dualinin de bir Archimedean d-cebiri olduğu gösterilmiştir. Yaptığımız araştırmamıza göre, şimdiye kadar bir Archimedean d-cebirinin bütün sıralı dualinin bir Archimedean d-cebiri olduğu ispatlanamamıştır.

Bu bölümde yukarıda ifade edilen sonuçları ve gerekli metotları inceleyeceğiz.

Önerme 2.3.1. A bir hemen hemen f-cebiri olsun. $0 < x \in A, 0 \leq G, H \in (A')'_n$ olmak üzere $G \wedge H = 0$ ve $0 \leq G, H \leq x''$ ise $G \cdot H = 0$.

Teorem 2.3.2. A bir hemen hemen f-cebiri $G \in (A')'_n$ ve $H \in (A')'_s$ ise $H \cdot G = 0$.

Teorem 2.3.3. A bir f-cebiri ise $(A')'_n$ Arens çarpımına göre bir f-cebiridir.

İspat: $0 \leq G, H \in (A')'_n, G \wedge H = 0$ ve $\exists 0 \leq x \in A$ için $0 \leq G, H \leq x''$ olduğunu varsayalım. Ayrıca, $F \in (A')'_n$, $0 \leq F \leq x''$ sağlandığını kabul edelim. Buna göre, $(F \cdot G) \wedge H = 0$ olduğunu göstereceğiz. $0 \leq f \in A'$ keyfi sabit için Sonuç 2.2.4 e göre

$G(g) = 0 = H(h)$, $f + f \cdot x = g + h$ ve $g \wedge h = 0$

olacak şekilde $g, h \in A'$ bulunur. Buradan $\forall \epsilon > 0$ ve $0 \leq y, z \in A$ ve $x = y + z$ için

$$g(y) + h(z) < \varepsilon \tag{1}$$

sağlanır. Önerme 2.3.1.'den

$G_1 = G \wedge (y - y \wedge z)''$ ve $H_1 = H \wedge (z - y \wedge z)''$

alıp buradan

$0 \leq G - G_1 \leq 2z''$ ve $0 \leq H - H_1 \leq 2y''$.

$(y - y \wedge z) \wedge (z - y \wedge z) = 0$ ve A f-cebiri olduğundan

$$x(y - y \wedge z) \wedge (z - y \wedge z) = 0. \tag{2}$$

Buradan

$0 \leq (F \cdot G_1) \wedge H_1 \leq x''(y - y \wedge z)'' \wedge (z - y \wedge z)''$

$= \big(x(y - y \wedge z) \wedge (z - y \wedge z)\big)''$

$= 0''$

$= 0.$

$\Longrightarrow (F \cdot G_1) \wedge H_1 = 0$ elde edilir.

Şimdi, $0 \leq \big(F \cdot (G - G_1)\big)(f)$ göz önüne alalım.

G_1 tanımından $G_1 \leq G$ yani $G - G_1 \geq 0$ olduğu açıktır. $0 \leq F \in (A')'_n$ ve $(A')'_n$ Arens çarpımına göre l-cebiri olduğundan

$0 \leq F \cdot (G - G_1) \in (A')'_n$.

A'nın değişme özelliği kullanılırak,

$0 \leq \big(F \cdot (G - G_1)\big)(f) \leq \big(x'' \cdot (G - G_1)\big)(f)$

$= \big((G - G_1) \cdot x''\big)(f) = (G - G_1)(x'' \cdot f)$

$= (G - G_1)(f \cdot x) \leq (G - G_1)(f + f \cdot x)$

$= (G - G_1)(g + h)$

$= (G - G_1)(g) + (G - G_1)(h)$

$= G(g) - G_1(g) + (G - G_1)(h)$

$\leq G(g) + (G - G_1)(h)$

$\leq 2z''(h) = 2h(z)$

$\Longrightarrow 0 \leq \big(F \cdot (G - G_1)\big)(f) \leq 2h(z). \qquad (3)$

Benzer olarak $H_1 \leq H, H \in (A')'_n$ ve $H_1 \in (A')'_n$ olduğundan $\forall 0 \leq f$ ve $0 \leq H - H_1 \in (A')'_n$ için

$0 \leq (H - H_1)(f)$

$\leq (H - H_1)(f + f \cdot x)$

$= (H - H_1)(g + h)$

$= (H - H_1)(g) + (H - H_1)(h)$

$= (H - H_1)(g) + H(h) - H_1(h)$

$\leq (H - H_1)(g) + H(h) \leq 2y''(g)$

$= 2g(y)$.

$\Longrightarrow 0 \leq (H - H_1)(f) \leq 2g(y). \qquad (4)$

O halde

$0 \leq (F \cdot G) \wedge H$

$= (F \cdot G) \wedge H - (F \cdot G_1) \wedge H + (F \cdot G_1) \wedge H - (F \cdot G_1) \wedge H_1 + (F \cdot G_1) \wedge H_1$

$= \big(F(G - G_1)\big) \wedge H + (F \cdot G_1) \wedge (H - H_1)$

$\leq F(G - G_1) + (H - H_1)$

$\Longrightarrow 0 \leq (F \cdot G) \wedge H \leq F \cdot (G - G_1) + (H - H_1).$

Böylece

$0 \leq \big((F \cdot G) \wedge H\big)(f)$

$\leq \big(F \cdot (G - G_1) + (H - H_1)\big)(f)$

$= (F \cdot (G - G_1)(f) + (H - H_1)(f))$

$\leq 2h(z) + 2g(y) < 2\varepsilon$

$\Longrightarrow 0 \leq \big((F \cdot G) \wedge H\big)(f) < 2\varepsilon$

Bu $\forall \varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\forall f \in A'$ için $\big((F \cdot G) \wedge H\big)(f) = 0$ ve dolayısıyla $(F \cdot G) \wedge H = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde, $(G \cdot F) \wedge H = 0$ olduğu gösterilir. Gerçekten (2)'den A bir f-cebiri olduğundan

$(y - y \wedge z)x \wedge (z - y \wedge z) = 0.$

Buradan

$0 \leq (G_1 F) \wedge H_1$

$\leq \big((G \wedge (y - y \wedge z)'')x''\big) \wedge (H \wedge (z - y \wedge z)'')$

$\leq (y - y \wedge z)'' x'' \wedge (z - y \wedge z)''$

$= ((y - y \wedge z)x)'' \wedge (z - y \wedge z)''$

$= \big((y - y \wedge z)x \wedge (z - y \wedge z)\big)''$

$= 0''$

$= 0.$

$\Longrightarrow 0 \leq (G_1 \cdot F) \wedge H_1 \leq 0$

$\Longrightarrow (G_1 \cdot F) \wedge H_1 = 0.$

$0 \leq (G - G_1)F \in (A')'_n$ göz önüne alınsın. (3) ve (4) eşitsizliklerinden

$0 \leq \big((G - G_1) \cdot F\big)(f)$

$\leq \big((G - G_1) \cdot x''\big)(f)$

$= (G - G_1)(x'' \cdot f)$

$\leq (G - G_1)(f + f \cdot x)$

$\leq 2h(z).$

$\Longrightarrow 0 \leq (H - H_1)(f) \leq 2g(y)$

elde edilir. O halde

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (G \cdot F) \wedge H \\
&= (G \cdot F) \wedge H - (G_1 \cdot F) \wedge H + (G_1 \cdot F) \wedge H - (G_1 \cdot F) \wedge H + (G_1 \cdot F) \wedge H_1 \\
&= (G \cdot F - G_1 \cdot F) \wedge H + (G_1 \cdot F) \wedge (H - H_1) + 0 \\
&= \big((G - G_1) \cdot F\big) \wedge H + (G_1 \cdot F) \wedge (H - H_1) \\
&\leq (G - G_1) \cdot F + (H - H_1).
\end{aligned}
$$

Buradan $\forall 0 \leq f$ için

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \big((G \cdot F) \wedge H\big)(f) \\
&\leq \big((G - G_1) \cdot F\big)(f) + (H - H_1)(f) < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

O halde

$0 \leq \big((G \cdot F) \wedge H\big)(f) < 2\varepsilon$ eşitsizliği $\forall \varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\forall 0 \leq f$ için $\big((G \cdot F) \wedge H\big)(f) = 0$ yani $(G.F) \wedge H = 0$ elde edilir.

Özetlersek bir $0 \leq x \in A$ için $0 \leq F, G, H \leq x''$ ve $G \wedge H = 0$ ise

$$(F \cdot G) \wedge H = 0 = (G \cdot F) \wedge H \tag{5}$$

sağlanır.

Genel durumda başka bir ifadeyle $\forall 0 \leq G, H \in (A')'_n$ için $G \wedge H = 0$ ise $\forall 0 \leq F$ için

$$(F \cdot G) \wedge H = 0 = (G \cdot F) \wedge H$$

olduğunu gösterelim. $I(\sigma(A))$, $(A')'_n$ de sıralı yoğun olduğundan

$$0 \leq F_\alpha \uparrow F,\ 0 \leq G_\beta \uparrow G$$

Buradan

$$0 \leq F_\alpha \leq x''_\alpha \text{ ve } 0 \leq G_\beta \leq y''_\alpha$$

olacak şekilde $0 \leq x_\alpha, y_\alpha \in A$ bulunur.

Şimdi, $0 \leq G_\beta \uparrow G$ ve her bir α için F_α sıralı sürekli olduğundan

$$0 \leq F_\alpha \cdot G_\beta \uparrow F \cdot G,\ 0 \leq F_\alpha \cdot G \uparrow F \cdot G,\ 0 \leq F_\alpha \cdot G_\beta \uparrow F \cdot G.$$

Buradan her bir $0 \leq H \in (A')'_n$ için

$$0 \leq \big(F_\alpha \cdot G_\beta\big) \wedge H \uparrow (F \cdot G) \wedge H$$

elde edilir. Her bir α, β için (5)'ten dolayı

$$F_\alpha \cdot G_\beta \wedge H = 0$$

olduğundan

$(F \cdot G) \wedge H = 0$

olduğu görülür.

Benzer şekilde, $(G \cdot F) \wedge H = 0$.

Teorem 2.3.4. A bir f-cebiri ise A'' Arens çarpımına göre bir f-cebiridir. Özel olarak A'' Dedekind tam ve her Dedekind tam uzay Archimedean olduğundan A'' bir Archimedean f-cebiridir.

İspat: $G, H \in A''$ ve $G \wedge H = 0$ olsun $0 \leq F \in A''$ kabul edelim.

$A'' = (A')'_n \oplus (A')'_s$

ayrışımını dikkate alırsak $0 \leq F \in A''$ için

$F = F_n + F_s, \;\; G = G_n + G_s, \; H = H_n + H_s$ alıp

$F \cdot G = F_n \cdot G_n$

ve dolayısıyla

$F \cdot G = F_n \cdot G_n \in (A')'_n$.

Buradan

$(F \cdot G) \wedge H_s = (F_n \cdot G_n) \wedge H_s = 0$.

Diğer taraftan $G_n \wedge H_n = 0$ ve $(A')'_n$ bir f-cebiri olduğundan

$(F_n \cdot G_n) \wedge H_n = 0$.

Böylece

$$\begin{aligned} (F \cdot G) \wedge H &= (F_n \cdot G_n) \wedge (H_n + H_s) \\ &= (F_n \cdot G_n) \wedge H_n + (F_n \cdot G_n) \wedge H_s \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(F \cdot G) \wedge H = 0$.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} (G \cdot F) \wedge H &= (G_n \cdot F_n) \wedge (H_n + H_s) \\ &= (G_n \cdot F_n) \wedge H_n + (G_n \cdot F_n) \wedge H_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (G \cdot F) \wedge H = 0$

elde edilir ki bu $(A')'_n$ nin bir f-cebiri olduğunu ispatlar.

Önerme 2.3.5. A bir f-cebiri ve $0 \leq a \in A$ olsun.

1) $\forall 0 \leq x \in A$ için $ax \leq x + a^2 x$.

2) $\forall 0 \leq f \in A'$ için $f \cdot a \leq f + f \cdot a^2$.

İspat:

1. $(x \wedge ax) - (x \wedge ax) = (x - x \wedge ax) \wedge (ax - x \wedge ax) = 0$

ve A bir f-cebiri olduğundan $\forall 0 \leq \alpha \in A$ için

$a(x - x \wedge ax) \wedge (ax - x \wedge ax) = 0$

$\Rightarrow \big(ax - a(x \wedge ax)\big) \wedge (ax - x \wedge ax) = 0$

$\Rightarrow ax - \big(a(x \wedge ax) \vee (x \wedge ax)\big) = 0.$

Buradan

$$\begin{aligned} ax &= a(x \wedge ax) \vee (x \wedge ax) \\ &\leq a(x \wedge ax) + (x \wedge ax) \\ &\leq a(a \cdot x) + x = a^2x + x \end{aligned}$$

$\Longrightarrow ax \leq a^2x + x.$

2) $0 \leq f \in A'$ ve $0 \leq \alpha \in A$ olsun. 1'den $\forall 0 \leq x \in A$ için

$$\begin{aligned} (f \cdot a)(x) &= f(ax) \leq f(a^2x + x) \\ &= f(x) + f(a^2x) \\ &= f(x) + (f.a^2)(x) \\ &= (f + f \cdot a^2). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (f \cdot a)(x) \leq (f + f \cdot a^2)(x)$

$\Longrightarrow f \cdot a \leq f + f \cdot a^2$.

Teorem 2.3.6. Bir f-cebiri A nın sıralı sürekli biduali $(A')'_n$ yine bir f-cebiridir.

İspat: Önerme 2.3.5(ii)'den $\exists 0 \leq x \in A$ ve $0 \leq G \in A''$ için

$$\begin{aligned} (x'' \cdot G)(f) &= (G \cdot x'')(f) = G(x'' \cdot f) = G(f \cdot x) \\ &\leq G(f + f \cdot x^2) = G(f) + G(f \cdot x^2) \\ &= G(f) + G(x^2)'' \cdot f) = G(f) + G((x'')^2 \cdot f) \\ &= G(f) + (G \cdot (x'')^2)(f) \\ &= G(f) + ((x'')^2 \cdot G)(f) = (G + (x'')^2 \cdot G)(f). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (x'' \cdot G)(f) \leq (G + (x'')^2 \cdot G)(f).$

$\Longrightarrow x'' \cdot G \leq G + (x'')^{2\cdot} \cdot G.$

Burada x'' yerine $\frac{1}{n}x''$ yazılırsa,

$\frac{1}{n}x'' \cdot G \leq G + (\frac{1}{n}x'')^2 \cdot G$

$\Longrightarrow \frac{1}{n}x'' \cdot G \leq G + \frac{1}{n^2}(x'')^2 \cdot G$

$$\Rightarrow n(x'' \cdot G) \leq n^2.G + (x'')^2 \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{6}$$

Şimdi $0 \leq G, H \in A''$ ve $G \wedge H = 0$ olsun. $\forall 0 \leq F \in (A')'_n$ için $(F \cdot G) \wedge H = 0$ olduğunu gösterelim. Bir $0 \leq x \in A$ için $0 \leq F \leq x''$ olmak üzere

$$0 \leq n\big((x'' \cdot G) \wedge H\big) = n(x'' \cdot G) \wedge nH \leq (n^2 \cdot G + (x'')^2 \cdot G) \wedge nH$$

$$= n^2 \cdot G \wedge nH + ((x'')^2 \cdot G) \wedge nH \leq 0 + (x'')^2 \cdot G = (x'')^2 \cdot G$$

$$\Longrightarrow 0 \leq n\big((x'' \cdot G) \wedge H\big) \leq (x'')^2 \cdot G$$

elde edilir.

A'' Dedekind tam ve dolayısıyla Archimedean olduğundan

$$(x'' \cdot G) \wedge H = 0. \tag{7}$$

Böylece

$$0 \leq F \cdot G \wedge H \leq x'' \cdot G \wedge H = 0.$$

$$\Longrightarrow F \cdot G \wedge H = 0. \tag{8}$$

$0 \leq F \in (A')'_n$ keyfi olsun $I(\sigma(A))$ $(A')'_n$'de sıralı yoğundur olduğundan (8) den

$\exists F_\alpha \in I\big(\sigma(A)\big): 0 \leq F_\alpha \uparrow F$. Burada $\forall \alpha$ için

$$(F_\alpha \cdot G) \wedge H = 0.$$

$\forall 0 \leq G \cdot f \in A'$ için $0 \leq F_\alpha \uparrow F$ olduğundan

$0 \leq F_\alpha(G \cdot f) \uparrow F(G \cdot f)$ ve $\forall 0 \leq f \in A'$ için

$$0 \leq (F_\alpha \cdot G)(f) \uparrow (F \cdot G)(f)$$

$$\Longrightarrow 0 \leq F_\alpha \cdot G \uparrow F \cdot G.$$

Buradan $\forall 0 \leq H \in (A')'_n$ için

$$0 \leq F_\alpha \cdot G \wedge H \uparrow F \cdot G \wedge H$$

olur ki $F_\alpha \cdot G \wedge H = 0$ olduğundan

$$F \cdot G \wedge H = 0$$

buluruz. Genel olarak

$\forall 0 \leq F, G \in (A')'_n$ ve $0 \leq H \in A''$ için $G \wedge H = 0$ olsun

$\forall x \in A$ için $x'' \cdot G = G \cdot x''$ olduğundan yani (7)'den, $\forall 0 \leq x \in A$ için

$(G \cdot x'') \wedge H = 0$. O halde

$$\forall \alpha \text{ için } (G \cdot F_\alpha) \wedge H = 0 \tag{9}$$

olur. Buradan $0 \leq F_\alpha \uparrow F$ ve G sıralı sürekli olduğundan

$$0 \leq G \cdot F_\alpha \uparrow G \cdot F \Longrightarrow 0 \leq (G \cdot F_\alpha) \wedge H \uparrow (G \cdot F) \wedge H.$$

Bu ise (9)'dan

$$(G \cdot F) \wedge H = 0$$

olması demektir. Bu ise $(A')'_n$ nın bir f-cebiri olduğunu ispatlar.

Aşağıdaki teorem bize önceki teoremin tüm A'' için geçerli olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.3.7. Bir f-cebiri A nın sıralı biduali A'' yine bir f-cebiridir.

İspat: $0 \leq F \in (A')'_n$ ve $0 \leq G, H \in A''$ ve $G \wedge H = 0$ ise $(F \cdot G) \wedge H = 0$ olduğunu bir önceki teoremde ispatladık. Şimdi $(G.F) \wedge H = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$0 \leq x \in A$ ve $0 \leq f \in A'$ için

$$x'' \cdot f = f \cdot x \leq f + f \cdot x^2 \leq f + (x^2)'' \cdot f = f + (x'')^2 \cdot f$$

olduğundan

$$x'' \cdot f \leq f + (x'')^2 \cdot f.$$

Buradan, $0 \leq F \in (A')'_n$ ve $0 \leq f \in A'$ için Önerme 2.3.5'ten $(A')'_n$ de

$$F \cdot f \leq f + F^2 \cdot f. \tag{10}$$

sağlanır. $0 \leq G \in A''$ olduğundan

$$\begin{aligned}(G \cdot F)(f) = G(F \cdot f) &\leq G(f + F^2 \cdot f)\\ &= G(f) + G(F^2 \cdot f)\\ &= G(f) + (G \cdot F^2)(f)\ .\end{aligned}$$

$\forall 0 \leq f \in A'$ için

$$(G \cdot F)(f) \leq G(f) + (G \cdot F^2)(f) = (G + G \cdot F^2)(f)$$

ve böylece

$$G \cdot F \leq G + G \cdot F^2. \tag{11}$$

$G \wedge H = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}(G \cdot F) \wedge H &\leq (G + G \cdot F^2) \wedge H\\ &= G \wedge H + (G \cdot F^2) \wedge H\\ &= (G \cdot F^2) \wedge H\end{aligned}$$

ve bu yüzden

$$(G \cdot F) \wedge H \leq (G \cdot F^2) \wedge H.$$

F yerine $\frac{1}{n}F$ yazarsak,

$$\frac{1}{n}(G \cdot F) \wedge H \leq \frac{1}{n^2}(G \cdot F^2) \wedge H$$

$$\Rightarrow (G \cdot F) \wedge H \leq \frac{1}{n}(G \cdot F^2) \wedge H, \quad n = 1,2, \dots .$$

Dolayısıyla A’nın Archimedean olmasından

$$(G \cdot F) \wedge H = 0$$

elde edilir. O halde, A'' bir f-cebiridir.

2.2. f -Cebirlerinin Sıralı Bidualinin Karakterizasyonu

Bu bölümde bir Archimedean f-cebirinin birim elemanlı bidualinin karakterizasyonu için gerek ve yeter koşulları araştıracağız. Bunun için Boulabiar ve Jaber'in 2011 yılında basılan bir çalışmasını baz alacağız (Boulabiar and Jaber, 2011).

2.2.1. Otomorfizmalar

Tanım 3.1.1. E bir Riesz uzayı olmak üzere $\forall B \subset E$ bandı için $T(B) \subset B$ sağlanıyorsa $T: E \longrightarrow E$ lineer operatörüne *band koruyan bir operatör* denir.

Teorem 3.1.2. E bir Archimedean Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow E$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktirler.

1. T bir band koruyan operatördür.

2. $f, g \in E$ ve $f \wedge g = 0$ ise $Tf \perp g$.

3. $f, g \in E$ ve $f \perp g$ ise $Tf \perp g$.

4. $\forall f \in E$ için $Tf \in \{f\}^{dd}$.

Ayrıca yukarıdaki özellikler sağlanması durumunda, $\forall f \in E$ için
$|Tf| = |T(|f|)|$.

Tanım 3.1.3. E bir Archimedean Riesz uzayı olmak üzere $T: E \longrightarrow E$ band koruyan operatörü aynı zamanda sıralı sınırlı ise T ye bir *otomorfizma* denir ve bütün otomorfizmaların oluşturduğu aile $O(E)$ ile gösterilir. O halde
$O(E) \coloneqq \{T \in L_b(E): T \text{ bir otomorfizmadır }\}$.

Açıkça, $L_b(E)$ den indirgenen kısmi sıralama bağıntısına göre $O(E)$, $L_b(E)$ nin bir sıralı vektör alt uzayıdır.

Teorem 3.1.4. E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Bu durumda $O(E)$ otomorfizmalar uzayı bileşke işlemine göre I birim elemanlı bir f-cebiridir (Pozitif Operators, 2006).

2.2.2. Yarı-Asal f-Cebirlerin Sıralı Bidualinin Karakterizasyonu

Archimedean bir f-cebirinin sıralı bidualinin Arens çarpımına göre bir f-cebiri olduğunu Bölüm 2'de gördük. Bu bölümde, f-cebiri A'' nin hangi şartlar altında birim elemana sahip olduğu araştırılacaktır.

A yarı-asal bir f-cebiri olmak üzere, $x \in A$ için

$$\pi_x(y) = xy \ \ (y \in A)$$

ile tanımlanan $\pi_x: A \to A$ operatörü A üzerinde bir otomorfizmadır. Buradan

$$p(x) = \pi_x \ \ (x \in A)$$

şeklinde $p: A \to O(A)$ dönüşümü tanımlayabiliriz. A yarı-asal olduğundan p bire-bir, cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. Buna göre A ve $p(A)$ özdeş olup A yarı-asal cebirinin $O(A)$ f-cebirinin bir f-alt cebiri olarak göz önüne alınabilir.

$O(A)'$, $O(A)$ nın sıralı duali ve $g \in O(A)'$ olsun. g nin A ya kısıtlanışı g_A ile gösterilir ve $\forall g \in O(A)'$ için $g_A \in A'$. Diğer taraftan, $\forall f \in (A')^+$ için $(O(A)')^+$, f nin bütün genişlemelerinin kümesi $\varepsilon(f)$ ile tanımlayalım, yani

$$\varepsilon(f) := \{g \in O(A)': 0 \leq g \text{ ve } g_A = f\}$$

olsun. Burada, Boulabiar ve Jaber'in 2011'deki The Order Bidual of f-Algebras Revisited (Boulabiar and Jaber, 2011) çalışmasını inceleyerek, A'' birim elemanlıdır $\Leftrightarrow$ $\varepsilon(f) \neq \emptyset$ olduğunu ispatlayacağız.

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe, A bir yarı-asal f-cebiri olarak alınacaktır.

Önerme 3.2.1. $x \in A$ ve $f \in A'$ alalım. $f * x: O(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli $\forall \pi \in O(A)$ için

$$(f * x)(\pi) = (f \circ \pi)(x)$$

şeklinde tanımlanırsa $f * x \in O(A)'$ olup

$$(f * x)_A = f \cdot x.$$

İspat: $f * x \in (O(A))'$ olduğunu gösterelim. İlk olarak,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \pi_1, \pi_2 \in O(A)$ için

$$\begin{aligned}(f * x)(\lambda\pi_1 + \pi_2) &= \big(f \circ (\lambda\pi_1 + \pi_2)\big)(x)\\ &= f\big((\lambda\pi_1 + \pi_2)(x)\big)\\ &= f(\lambda\pi_1(x) + \pi_2(x))\end{aligned}$$

$$= \lambda f\big(\pi_1(x)\big) + f\big(\pi_2(x)\big)$$
$$= \lambda(f \circ \pi_1)(x) + (f \circ \pi_2)(x)$$
$$= \lambda(f * x)(\pi_1) + (f * x)(\pi_2)$$
$\Longrightarrow (f * x)(\lambda\pi_1 + \pi_2) = \lambda(f * x)(\pi_1) + (f * x)(\pi_2)$

olduğundan $f * x$ lineerdir.

Şimdi $f * x$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösterelim. $\pi_1, \pi_2 \in O(A)$ için $0 \leq \pi_1 \leq \pi_2$ ve $0 \leq x \in A$ olsun.

$$|(f * x)(\pi)| = |(f \circ \pi_1)(x)| = \big|f\big(\pi_1(x)\big)\big|$$
$$\leq |f||\pi_1(x)| \leq |f|\big(\pi_2(x)\big)$$
$$\leq |f|(y).$$
$\Longrightarrow |(f * x)(\pi_1)| \leq |f|(y).$

Son olarak, $(f * x)_A = f \cdot x$ olduğunu doğrulayalım. $\forall y \in A$ için

$$(f * x)_A(y) = (f * x)\big(\pi_y\big) = \big(f \circ \pi_y\big)(x)$$
$$= f\left(\pi_y(x)\right) = f(xy)$$
$$= (f \cdot x)(y).$$
$\Longrightarrow (f * x)_A(y) = (f \cdot x)(y), \forall y \in A.$

$\Longrightarrow (f * x)_A = f \cdot x$

elde edilir.

Önerme 3.2.2. $\forall F \in A''$ ve $\forall f \in O(A)'$ için

$$\Phi(F)(f) = F(f_x)$$

olarak tanımlanan $\Phi: A'' \to O(A)''$ dönüşümü bir cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. Üstelik, Φ bire-birdir $\Leftrightarrow A''$ yarı-asaldır.

İspat: $\forall F, G \in A'', \lambda \in \mathbb{R}$ ve $f \in O(A)'$ için

$$\Phi(\lambda F + G)(f) = (\lambda F + G)(f_A)$$
$$= \lambda F(f_A) + G(f_A)$$
$$= \lambda\Phi(F)(f) + \Phi(G)(f)$$

olduğundan Φ lineerdir.

Şimdi Φ nin cebir homomorfizması olduğunu gösterelim. $\forall F, G \in A'',\ f \in O(A)'$ ve $x \in A$ olsun. $\forall y \in A$ için

$(f_A \cdot x)(y) = f_A(x \cdot y) = f(\pi_x \cdot \pi_2)$

$= (f \cdot \pi_x)(\pi_y) = (f \cdot x)_A(y).$

$\Longrightarrow (f_A \cdot x)(y) = (f \cdot x)_A(y), \forall y \in A.$

$\Longrightarrow f_A \cdot x = (f \cdot \pi_x)_A.$

Buradan

$(G \cdot f_A)(x) = G((f \cdot \pi_x)_A$

$= \Phi(G)(f \cdot \pi_x)$

$= (\Phi(G) \cdot f)(\pi_x)$

$= (\Phi(G) \cdot f)_A(x)$.

$\Longrightarrow (G \cdot f_A)(x) = (\Phi(G) \cdot f)_A(x), \forall x \in A.$

$\Longrightarrow G \cdot f_A = (\Phi(G) \cdot f)_A.$

Böylece

$\Phi(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f_A)$

$= F((\Phi(G) \cdot f)_A)$

$= \Phi(f)(\Phi(G) \cdot f)$

$= \big(\Phi(F) \cdot \Phi(G)\big)(f)$

$\Longrightarrow \Phi(F \cdot G)(f) = \big(\Phi(F) \cdot \Phi(G)\big)(f), \forall f \in O(A)'.$

$\Longrightarrow \Phi(F \cdot G) = \Phi(F) \cdot \Phi(G)$

elde edilir ki bu Φ nin bir cebir homomorfizması olduğunu gösterir.

Şimdi Φ nin bir Riesz homomorfizması olduğunu göstermek için $\forall F \in A''$ için $\Phi(F^+) = \Phi(F)^+$ sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için öncelikle; $0 \leq f \in O(A)'$ için $0 \leq h \leq f_A$ ile $h \in A'$ seçelim. Klasik Hahn-Banach Teoreminden $k_A = h$ olacak şekilde bir $k \in O(A)'$ mevcuttur. Dolayısıyla

$\Phi(F^+)(f) = F^+(f_A) = \sup\{F(h): 0 \leq h \leq f_A \in A'\}$

$= \sup\{F(k_A): 0 \leq k \leq f \in O(A)'\}$

$= \sup\{\Phi(F)(k): 0 \leq k \leq f \in O(A)'\}$

$= \Phi(F)^+(f)$

olduğundan Φ bir Riesz homomorfizmasıdır.

Son olarak, Φ, bire-birdir $\Longleftrightarrow A''$ yarı-asal olduğunu gösterelim.

Φ, bire-bir ise A'', $O(A)''$ nün bir f –altcebiri olarak göz önüne alınabileceğinden ve $O(A)''$ birim elemanlı bir cebir olduğundan A'' yarı-asaldır. Tersi olarak, A'' yarı-asal olsun. $F \in A''$ keyfi ve $\Phi(F) = 0$ olmak üzere $\forall f \in A'$ ve $\forall x \in A$ için, Önerme 3.2.1'den,

$(F \cdot f)(x) = F(f \cdot x) = F((f * x)_A) = \Phi(F)(f * x) = 0$

olduğundan $F \cdot f = 0$ ve dolayısıyla F nin lineerliğinden

$F^2(f) = F(F \cdot f) = 0$

yani $F^2 = 0$. Fakat A'' yarı-asal olduğundan $F = 0$ edilir. Bu ise Φ nin bire-bir olması demektir.

Önerme 3.2.3. $f \in A'$ ve $F \in A''$ olsun. $F * f: O(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli $\forall \pi \in O(A)$ için

$(F * f)(\pi) = F(f \circ \pi)$

şeklinde tanımlanırsa $F * f \in O(A)'$ olup

$(F * f)_A = F \cdot f.$

İspat: $F * f \in O(A)'$ olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak, $F * f$, $O(A)$ üzerinde lineer fonksiyonel olduğunu göstermeliyiz. $\pi_1, \pi_2 \in O(A)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}(F * f)(\lambda\pi_1 + \pi_2) &= F\big(f \circ (\lambda\pi_1 + \pi_2)\big)\\ &= F\big(f(\lambda\pi_1 + \pi_2)\big)\\ &= F(\lambda f(\pi_1) + f(\pi_2))\\ &= \lambda F\big(f(\pi_1)\big) + F\big(f(\pi_2)\big)\\ &= \lambda F(f \circ \pi_1) + F(f \circ \pi_2)\\ &= \lambda(F * f)(\pi_1) + (F * f)(\pi_2).\end{aligned}$$

O halde

$(F * f)(\lambda\pi_1 + \pi_2) = \lambda(F * f)(\pi_1) + (F * f)(\pi_2)$

olduğundan $F * f$ lineerdir.

Şimdi, $F * f$ nin sınırlı olduğunu gösterelim. $0 \leq f \in A'$ ve $\pi_1, \pi_2 \in O(A)$ için $0 \leq \pi_1 \leq \pi_2$ olduğunu varsayalım. Buradan

$0 \leq f \circ \pi_1 \leq f \circ \pi_2$

eşitsizlikleri sağlanır. Diğer taraftan F sıralı sınırlı olduğundan $\forall g \in A'$ için

$0 \leq g \leq f \circ \pi_2$ ve $F(g) \leq \lambda$

Olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan

$(F * f)(\pi_1) = F(f \circ \pi_1) \leq \lambda$

olup $F * f$ sıralı sınırlıdır. Dolayısıyla herhangi bir $F \in A''$ için ise

$F * f = F^+ * f - F^- * f$

olup $F * f$ sıralı sınırlıdır. Sonuç olarak, $F * f \in O(A)'$.

Son olarak, $f \in A'$ ve $F \in A''$ için

$(F * f)_A = F \cdot f$

olduğunu gösterelim. $\forall x \in A$ için

$(F * f)(x) = (F * f)(\pi_x) = F(f \circ \pi_x)$

ve $\forall y \in A$ için

$(f \circ \pi_x)(y) = f\big(\pi_x(y)\big) = f(xy) = (f.x)(y)$

olduğundan

$f \circ \pi_x = f \cdot x$.

O halde $\forall x \in A$ için

$(F * f)(x) = F(f \cdot x) = (F \cdot f)(x)$

$\Longrightarrow (F * f)_A = F \cdot f$

elde edilir.

Önerme 3.2.4. $f \in (A')^+$ ve $\varepsilon(f) \neq \emptyset$ olsun. $\forall x \in A^+$ için $f \cdot x = 0$ ise $f(x) = 0$.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $O(A)$ da, $O(A)$ bir f-cebiri olduğundan,

$(I - nx)^+(I - nx) \geq 0$

sağlanır. Buradan

$0 \leq nx - n(x \wedge nx^2) \leq I.$

$\varepsilon(f) \neq \emptyset$ olduğundan bir $g \in \varepsilon(f)$ için

$0 \leq ng(x) - ng(x \wedge nx^2) \leq g(I)$ (12)

sağlanır. Diğer taraftan, $f \cdot x = 0$ olduğundan

$0 \leq g(x \wedge nx^2) \leq ng(x^2) = nf(x^2) = n(f \cdot x)(x) = 0.$

$\Longrightarrow g(x \wedge nx^2) = 0$

elde edilir ve böylece (12)'den

$0 \leq ng(x) \leq g(I).$

Fakat $x \in A^+$ ve $g \in \varepsilon(f)$ olduğundan

$\Longrightarrow 0 \leq ng(x) = nf(x) \leq g(I)$

olur. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$0 \leq nf(x) \leq g(I) \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n} g(I)$

olup A nın Archimedean özelliğnden

$f(x) = 0$

elde edilir.

3. BULGULAR

3.1.1. f-Cebirlerin Birimli Sıralı Bidualinin Karakterizasyonu

$\forall x \in A$ ve $\forall f \in A'$ için

$x''(f) = f(x)$

şeklinde tanımlanan $x'': A' \to \mathbb{R}$ fonksiyonelinin sıralı sınırlı yani $x'' \in A''$ olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde, $\forall \pi \in O(A)$ için $\pi'' \in O(A)''$ ve $\forall f \in O(A)'$ için

$\pi''(f) = f(\pi)$

olarak tanımlanır. Böylece tezimizin ana teoremi için gerekli olan bütün unsurları belirlemiş olduk.

Teorem 3.3.1. Bir f-cebiri A'' birim elemanlıdır ancak ve ancak A üzerindeki her pozitif lineer fonksiyonel $O(A)$ üzerindeki bir pozitif lineer fonksiyonele genişler.

İspat: E, A'' de birim elemanlı kabul edelim ve $0 \leq f \in A'$ olsun. Önerme 3.2.3'ten $E * f$, $O(A)'$ de pozitif elemanlıdır. Üstelik $\forall x \in A$ için

$(E * f)_A(x) = (E \cdot f)(x) = x''(E \cdot f) = (x'' \cdot E)(f) = x''(f) = f(x)$

olduğundan $O(A)'$ de $E * f, f$ nin pozitif genişlemesidir.

Tersine, A üzerindeki her pozitif lineer fonksiyonelin $O(A)$ üzerinde bir pozitif lineer fonksiyonele genişlediğini varsayalım. Diğer bir ifadeyle, $\forall 0 \leq f \in A'$ için $\emptyset \neq \varepsilon(f)$ ve böylece $O(A)'$ de φ_f en küçük elemanına sahiptir. Özellikle, Önerme 3.2.2.'den Φ bire-bir olduğundan A'' yarı-asaldır. $E: (A')^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli $\forall f \in (A')^+$ için

$E(f) = \varphi_f(I)$

şeklinde tanımlansın. $0 \leq f, g \in A'$ ve $h \in \varepsilon(f + g)$ olsun.

$0 \leq f \leq f + g = h_x$

olduğundan Hanh-Banach Teoremi gereği $\tilde{f} \leq h$ olacak şekilde$\tilde{f} \in \varepsilon(f)$ vardır. Burada

$\tilde{g} = h - \tilde{f}$

alınırsa $\tilde{g} \in \varepsilon(g)$ olduğuna açıktır. Kısaca, bir $\tilde{f} \in \varepsilon(f)$ ve $\tilde{g} \in \varepsilon(g)$ için

$h = \tilde{f} + \tilde{g}$

ayrışımı vardır. Buradan

$E(f + g) = E(f) + E(g)$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 1.3.4. Kantorovich Teoremine göre E nin A'' de bir pozitif elemana tek olarak ve yine E ile ifade edilen bir genişlemesi mevcuttur.

Şimdi, $f \in (A')^+$ ve $x \in A^+$ olsun. $f \cdot x \in (A')^+$ ve $f * x \in \varepsilon(f \cdot x)$ olduğundan,

$0 \leq \varphi_{f.x} \leq f * x$ (13)

elde edilir. $O(A)$ nın x ile üretilen esas halka idealini I_x ile gösterilirse

$I_x = \{\pi(x) : \pi \in O(A)\}$

olup A nın bir Riesz alt uzayıdır. $h: I_x \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli $\forall \pi \in O(A)$ için

$h(\pi(x)) = \varphi_{f.x}(\pi)$

şeklinde tanımlanırsa bu h iyi tanımlıdır. Gerçekten, eğer $\forall \pi \in O(A)$ ve $\forall x \in A^+$ için $\pi(x) = 0$ ise $h(\pi(x)) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$0 \leq |\varphi_{f.x}(\pi)| \leq \varphi_{f.x}(|\pi|) \leq (f * x)(|\pi|)$

$= (f \circ |\pi|)(x)$

$= f(|\pi(x)|)$

$= 0.$

$\Rightarrow 0 \leq |\varphi_{f \cdot x}(\pi)| \leq 0.$

$\Rightarrow \varphi_{f \cdot x}(\pi) = 0.$

$\Rightarrow h(\pi(x)) = \varphi_{f \cdot x}(\pi).$

$\Rightarrow h(\pi(x)) = 0$

olduğundan h iyi tanımlıdır. Şimdi, h ın lineer olduğunu gösterelim. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\pi_1(x)$, $\pi_2(x) \in I_x$ olsun. Buradan

$h(\lambda\pi_1(x) + \pi_2(x)) = \varphi_{f \cdot x}(\lambda\pi_1 + \pi_2)$

$= \lambda\varphi_{f \cdot x}(\pi_1) + \varphi_{f \cdot x}(\pi_2)$

$= \lambda h(\pi_1(x)) + h(\pi_2(x))$

$\Rightarrow h(\pi_1(x) + \pi_2(x)) = \lambda h(\pi_1(x)) + h(\pi_2(x))$

olduğundan h lineerdir. Şimdi h ın pozitif olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq y \in I_x$ ise $y = \pi(x)$ olacak şekilde bir $\pi \in O(A)$ mevcuttur. Böylece

$h(y) = h(y^+) = h((\pi(x))^+)$

$= h(\pi^+(x)) = \varphi_{f.x}(\pi^+) \geq 0$

olduğundan h pozitiftir. Üstelik, $y \in I_x$ ve $\pi \in O(A)$ öyleki $0 \leq y = \pi(x)$ ise (13)'ten

$0 \leq h(y) = h(\pi(x)) = \varphi_{f.x}(\pi)$

$$\le (f * x)(x) = (f \circ \pi)(x)$$
$$= f\big(\pi(x)\big) = f(y)$$

elde edilir ki bu $0 \le \tilde{h} \le f$ olacak şekilde bir $\tilde{h} \in A'$ mevcut olduğunu gösterir. $\forall \pi \in O(A)$ için

$$\varphi_{f\cdot x}(\pi) = h\big(\pi(x)\big) = \tilde{h}\big(\pi(x)\big)$$
$$= \big(\tilde{h} \circ \pi\big)(x) = \big(\tilde{h} * x\big)(\pi).$$
$$\Longrightarrow \varphi_{f\cdot x}(\pi) = \big(\tilde{h} * x\big)(\pi).$$
$$\Longrightarrow \varphi_{f\cdot x} = \tilde{h} * x.$$

Tersine olarak

$$0 \le \big(f - \tilde{h}\big) \cdot x$$
$$= f \cdot x - \tilde{h} \cdot x$$
$$= f \cdot x - \big(\tilde{h} * x\big)_A$$
$$= f \cdot x - \big(\varphi_{f\cdot x}\big)_A$$
$$= 0.$$

Önerme 3.2.4'den $\big(f - \tilde{h}\big)(x) = 0$ elde ederiz ve dolayısıyla

$$f(x) = \tilde{h}(x) = \big(\tilde{h} * x\big)(I)$$
$$= \varphi_{f\cdot x}(I) = E(f \cdot x)$$
$$= (E \cdot f)(x).$$
$$\Longrightarrow f(x) = (E \cdot f)(x).$$
$$\Longrightarrow E \cdot f = f.$$

olur. O halde $\forall F \in A''$ için

$$(F \cdot E)(f) = F(E \cdot f) = F(f)$$
$$\Longrightarrow F \cdot E = F$$

elde edilir. Archimedean f-cebiri değişmeli olduğundan aynı zamanda $E \cdot F = F$ olur ki bu E, A'' nin birim elemanı olduğunu ispatlar.

Sonuç 3.3.2. A'' nin Arens çarpımına göre birim elemanını E ve $f \in A''$ olsun. Teorem 3.2.1'in ispatından $E * f \in \varepsilon(f)$ olduğu görülür. Aslında, bu $E * f$, $\varepsilon(f)$ nin en küçük elemanıdır. Gerçekten, $g \in \varepsilon(f)$ ve $\pi \in O(A)$ ise $her\ x \in A$ için

$$(f \circ \pi)(x) = (g_A \circ \pi)(x)$$
$$= g_A\big(\pi(x)\big) = g\big(\pi(x)\big)$$
$$= (g \cdot \pi)(x) = (g \cdot \pi)_A(x).$$

$\Longrightarrow f \circ \pi = (g \cdot \pi)_A$.

$\Longrightarrow (\Phi(E) \cdot g)(\pi) = \Phi(E)(g \cdot \pi)$

$= E((g \cdot \pi)_A) = E(f \circ \pi)$

$= (E * f)(\pi)$.

$\Longrightarrow \Phi(E) \cdot g = E * f$.

Üstelik, Önerme 3.2.2'den

$\Phi(E) = \Phi(E^2) = \Phi(E)^2$.

Böylece, $O(A)'$'de, $0 \leq \Phi(E) \leq I''$ eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak

$0 \leq E * f = \Phi(E) \cdot g \leq I'' \cdot g = g$

$\Longrightarrow 0 \leq E * f \leq g$

olduğundan $E * f$, $\varepsilon(f)$ nin en küçük elemanıdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde genel olarak Riesz cebirleri ve f -cebirlerinin temel özellikleri araştırılarak herhangi bir Archimedean f -cebirinin birim elemanlı bidualinin karakterizasyonu için gerek ve yeter koşullar verildi. İlk olarak Bernau ve Huijsmans'ın 1995 basımlı bir makalesinde kullandığı metotla, bir Archimedaen f-cebirinin biduali yine bir f-cebiri olduğu detaylı bir şekilde verildi. Daha sonra Boulabiar ve Jaber'in 2011 yılında basılan bir çalışmasını inceleterek, Archimedean f -cebirinin birim elemanlı bidualinin karakterizasyonu için gerek ve yeter koşullar araştırıldı. Buna göre, bir f-cebiri A'' birim elemanlı için gerek ve yeter koşul A üzerindeki her pozitif lineer fonksiyonel otomorfizmalar uzayı $O(A)$ üzerindeki bir pozitif lineer fonksiyonele genişlemesi olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada Riesz cebirleri ve bu cebirlerin en önemli sınıflarından olan f-cebirlerinin temel özellikleri araştırılarak herhangi bir Archimedean f-cebirinin birim elemanlı bidualinin karakterizasyonu için gerek ve yeterli koşulları verdik.

Burada Archimedean f-cebirleri için elde edilen sonuçlar diğer Riesz cebir sınıfları için de araştırılabilir. Bu tezde tanımları verilen hemen hemen f-cebir ve d-cebiri sınıfları dışında son zamanlarda tanımlanan önemli cebir sınıfları mevcuttur. Bunlardan bazıları, r-cebirleri (r-algebras) (Yılmaz, 2011) veya yarı-hemen hemen f-cebirleri (Yılmaz, 2014), yarı f-cebirleri (Boulabiar ve Hadded, 2003), genelleştirilmiş f-cebirleri (Chil, 2009) olarak verilebilir.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C.D. and Burkinshow, O. 2006. Pozitif Operators. Springer Publishing, New York, ISBN: 101-4020-5007-0, 376.

Bernau, S.J. and Huijsmans, C.D. 1990. Almost f- algebras and d-algebras. Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 107, 287-308.

Bernau, S.J. and Huijsmans, C.D. 1995. The order bidual of almost f- algebras and d- algebras. Transactions of the American Mathematical Society, 347, 4259-4275.

Boulabiar, K. and Jaber, J. 2011. The order bidual of f-algebras revisited. Positivity, 271-279. DOI 10.1007/s11117-010-0072-x

Birkhoff, G. 1967. Lattice Theory. American Mathematical Society Colloq Publishing, ISBN: 978-0821810255, 420.

Birkhoff, G. And Pierce, R.S. 1956. Lattice-Ordered Rings and Modules. Springer Publishing, New York, ISBN: 978-1-4419-1720-1, 623.

Buskes, G., Boulabiar, K. and Triki, A. 2003. Some recent trends and advance in certain lattice ordered algebras. Contemporary Mathematics, 328, 99-133.

Boulabiar, K. and Hadded, F. 2003. A class of lattice ordered algebras. Phd. Thesis. Algebra University, Algebra, 50, 305-323.

De Pagter, B. 1981. f- algebras and orthomorphisms. Phd. Thesis. University of Leidin, Holland, 23, 371-375.

Ercan, Z. and Wickstead, A.W. 1996. Banach Lattices of Continous Banach Lattices-Valued Functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 198, 121-136.

Filter, W. 1994. Representations of Archimedean Riesz spaces-a survey. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 24, 771-851.

Huijsmans, C.B. 1991. Lattice ordered algebras and f-algebras: A survey. Studies in Ekonomic Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces and Economics (C. D. Aliptantis, K. C. Border and W. A. J. Luxemburg, eds.) Spinger, Berlin, pages 151- 169.

Huijsmans, C. and De Pagter, B. 1982. Ideal theory in f-algebras. Transactions of the American Mathematical Society, 269, 225-245.

Huijsmans, C. and De Pagter, B. 1984. Subalgebras and riesz subspaces of an f-algebra. Proceeding London Mathematical Society, 48 (3) , 161-174.

Huijsmans, C.D. 1989. The order bidual of lattice ordered algebras II. Journal Operator Theory, 22, 277-290.

Luxsemburg, W.A.J. and Zaanen, A.C. 1971. Riesz Spaces I. Elsevier Publishing, North-Holland, Amsterdam-London, ISBN: 0444866264, 720.

Meyer-Nieberg, P. 1991. Banach Lattices. Universitex, Springer, Berlin, ISBN: 978-3-540-54201-8, 395.

Scheffold, E. 1981. FF-Banachverbandsalgebren. Mathematical Zeitschfift, 177, 193-205.

Schaefer, H. H. 1974. Banach Lattices and Positive Operators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, ISBN: 978-3-642-65972-0, 376.

Yılmaz, R. 2001. On lattice ordered algebras. Ph. D. Thesis. University of Wales.

Yılmaz, R. 2011. The bidual of r-algebras. Ukrainian Mathematical Journal, 63 (5), 713-717.

Yılmaz, R. 2014. Notes on lattice ordered algebras. Serdica Mathematical Journal, 40 (3-4), 319-328.

Zaanen, A. C. 1983. Riesz Spaces II. Elsevier Publishing, North-Holland, Amsterdam, ISBN: 0080960189, 717.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında İstanbul'un Üsküdar ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini Rize'de tamamladı. 2008 yılında başladığı lisans eğitimini 2012 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2013 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde başladığı Yüksek Lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir.