

**T.C.  
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUMARASWAMY-G DAĞILIM AİLESİNİ KULLANARAK ÜSTEL  
DAĞILIMIN BİR GENİŞLETİLMİŞ DURUMU**

**ORHAN MAZLUM YAZAR**

**TEZ DANIŞMANI**

**DOÇ. DR. RUŞEN YILMAZ**

**İKİNCİ TEZ DANIŞMANI**

**YRD. DOÇ. DR. MUSTAFA ÇAĞATAY KORKMAZ**

**TEZ JÜRİLERİ**

**PROF. DR. YILMAZ ALTUN**

**YRD. DOÇ. DR. İSHAK CUMHUR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

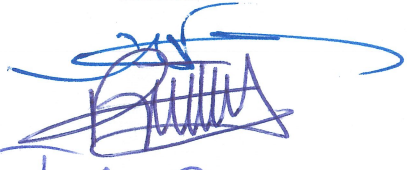

**RİZE-2015**

**Her Hakkı Saklıdır**

T.C.  
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KUMARASWAMY-G DAĞILIM AİLESİNİ KULLANARAK ÜSTEL  
DAĞILIMIN BİR GENİŞLETİLMİŞ DURUMU**

Doç. Dr. Ruşen YILMAZ ve Yrd. Doç. Dr. Mustafa Çağatay KORKMAZ danışmanlığında, Orhan Mazlum YAZAR tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından **26/10/2015** tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı	İmzası
Başkan	: Prof. Dr. Yılmaz ALTUN	
Üye	: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak CUMHUR	

  
Prof. Dr. Selami ŞAŞMAZ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ



## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmam süresince bana desteklerini sunan bilgi, tecrübe ve deneyimlerinden yararlanmamı sağlayan değerli hocalarım Prof. Dr. Yılmaz ALTUN Doç. Dr. Ruşen YILMAZ, Yrd. Doç. Dr. Mustafa Çağatay KORKMAZ'a ve benden yardımlarını, ilgilerini eksik etmeyen başta Tarık ERDİL olmak üzere mesai arkadaşlarıma, Anıl DEMİRBAŞ, Yener ÖZ, Mustafa NARMANLI, Saim DURDU, Hamdi KIRTAŞ, Fehmi CEYLAN, Muhammet TURHAN, M. Çağrı AKSU ve Ercüment ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bütün yaşamım boyunca bana azim ve birlikteliği hissettiren, eğitim hayatımda sürekli yanımda olan tüm aile bireylerime sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarak ithaf ederim.

**Orhan Mazlum YAZAR**

## TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan Kumaraswamy-G Dağılım Ailesini Kullanarak Üstel Dağılımın Genişletilmiş Bir Durumu başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 26 / 10 / 2015

**Orhan Mazlum YAZAR**

*Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir*

## ÖZET

### KUMARASWAMY-G DAĞILIM AİLESİNİ KULLANARAK ÜSTEL DAĞILIMIN BİR GENİŞLETİLMİŞ DURUMU

**Orhan Mazlum YAZAR**

**Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi  
Danışmanı: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ  
Yrd. Doç. Dr. Mustafa Çağatay KORKMAZ**

Bu tez çalışmasında üstel dağılımın bir genel durumu, Kumaraswamy-G(Kw-G) dağılım ailesi kullanılarak elde edilmiştir. Bu yeni genelleştirilmiş üstel dağılımın, olasılık yoğunluk fonksiyonu biçimi, quantil fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu, momentleri, en çok olabilirlik parametre tahminleri ve sıra istatistikleri gibi dağılımsal özellikleri incelenmiştir. Ayrıca parametre tahminleri için bir simülasyon ve bir gerçek veri uygulaması yapıp, bazı üstel dağılım modelleri ile karşılaştırma yapılmıştır.

**2015, 62 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Kumaraswamy-G dağılım ailesi, Kumaraswamy dağılımı, üstel dağılım, Nadarajah ve Haghghi dağılımı, Üstelleştirilmiş Nadarajah ve Haghghi Dağılımı.

## **ABSTRACT**

### **AN EXTENSION OF THE EXPONENTIAL DISTRIBUTION VIA KUMARASWAMY-G DISTRIBUTION FAMILY**

**Orhan Mazlum YAZAR**

**Recep Tayyip Erdoğan University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematic  
Master Thesis  
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ruşen YILMAZ  
Asst. Prof. Dr. Mustafa Çağatay KORKMAZ**

In this thesis study, a general situation of exponential distribution is obtained by using Kumaraswamy-G(Kw-G) distribution family. The distribution features of this new generalized exponential distribution such as the form of probability density function, quantile function, hazard rate function, its moments, maximum likelihood parameter estimations and order statistics are analyzed. Besides, for parameter estimations, a simulation and real data application are performed and compared with some exponential distribution models.

**2015, 62 pages**

**Keywords:** Kumaraswamy-G distribution family, kumaraswamy functions, Exponential Function, Nadarajah and Haghighi distribution, Exponential Nadarajah and Haghighi Distribution.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET .....	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER .....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	VIII
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....	IX
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Özeti .....	2
1.3. Temel Kavramlar.....	5
1.3.1. Beklenen Değer .....	5
1.3.2. Moment .....	6
1.3.3. Yaşam Fonksiyonu .....	6
1.3.4. Bozulma Oranı Fonksiyonu.....	7
1.3.5. En Çok Olabilirlik Parametre Tahminleri .....	7
1.3.6. Sıra İstatistikleri .....	8
1.4. Bazı Özel Sürekli Rasgele Dağılımlar Ve Özellikleri.....	9
1.4.1. Normal Dağılım.....	10
1.4.2. Weibull Dağılımı.....	11
1.4.3. Gamma Dağılımı .....	12
1.4.4. Üstel Dağılım(E) .....	13
1.4.5. Ters Gaussian Dağılımı .....	15
1.4.6. Gumbel Dağılımı.....	16
1.4.7. Kumaraswamy dağılımı(Kw).....	16
1.4.8. Üstel Dağılımın Genelleştirilmiş Bir Durumu .....	17
1.4.9. Üstelleştirilmiş NH Dağılımı.....	19
1.5. Dağılımların Genel Bir Ailesi: Kumaraswamy-G Dağılım Ailesi.....	21
1.5.1. Kw-Normal Dağılım(KwN) .....	22
1.5.2. Kw-Weibull Dağılımı(KwW).....	23

1.5.3. Kw- Gamma Dağılımı(KwGa).....	23
1.5.4. Kw-Ters Gaussian Dağılımı(KwIG) .....	24
1.5.5. Kumaraswamy-Gumbel Dağılımı(KumGum).....	24
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	26
2.1. Kumaraswamy -Nadarajah ve Haghghi Dağılım Ailesi.....	26
2.1.1. Dağılımın Özel Durumları.....	26
2.2. Ters Fonksiyon .....	29
2.3. Yaşam Fonksiyonu .....	29
2.4. Bozulma Oranı Fonksiyonu.....	29
2.4.1. Bozulma oranı fonksiyonunun şekil yönünden incelenmesi .....	30
2.5. Moment .....	32
2.6. En Çok Olabilirlik Parametre Tahminleri .....	34
2.7. Sıra İstatistikleri .....	36
3. BULGULAR.....	37
3.1. Simülasyon .....	37
3.2. Su Taşma Verisi .....	39
4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	41
5. ÖNERİLER.....	42
KAYNAKLAR .....	43
EKLER .....	49
ÖZGEÇMİŞ .....	51



## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 1.</b> Normal dağılıma ait oyf grafiği. (Yeşil çizgi Standart Normal Dağılımı göstermektedir.) (URL-3) .....	10
<b>Şekil 2.</b> Farklı $c$ ve $\beta=0.5$ parametrelili Weibull dağılımına ait bozulma oranı grafiği..	11
<b>Şekil 3.</b> Weibull dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği (URL-4). .....	12
<b>Şekil 4.</b> $\beta=0.5, \beta=1, \beta=1.5$ ve $\lambda=1$ için gamma dağılımına ait bozulma oranı grafiği.....	13
<b>Şekil 5.</b> Bazı değerler için gamma dağılımına ait oyf grafiği (URL-5).....	13
<b>Şekil 6.</b> Üstel dağılıma ait bozulma oranı grafiği .....	14
<b>Şekil 7.</b> Üstel dağılıma ait oyf grafiği (URL-6).....	14
<b>Şekil 8.</b> Ters gaussian dağılımına ait oyf grafiği (URL-7) .....	15
<b>Şekil 9.</b> Ters gaussian dağılımına ait bozulma oranı fonksiyonu grafiği .....	15
<b>Şekil 10.</b> Bazı Kumaraswamy yoğunlukları.(URL-8) .....	17
<b>Şekil 11.</b> $\beta=1$ ve $\alpha=0.5, 1, 2$ değerleri için $NH$ olasılık yoğunluk fonksiyonu .....	18
<b>Şekil 12.</b> $\beta=1$ ve $\alpha=0.5, 1, 2$ değerleri için $NH$ Bozulma oranı fonksiyonu .....	18
<b>Şekil 13.</b> Bazı değerleri için $ENH$ olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	20
<b>Şekil 14.</b> (a)Kw-Normal( $a, b, 0, 1$ ), (b)Kw-Gamma( $a, b, 1, \alpha$ ), (c)Kw-Gumbel( $a, b, 0, 1$ ), (d) Kw-Ters Gaussian ( $a, b, 0, 1$ ) değerleri için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ...	25
<b>Şekil 15.</b> (a)Kw-Normal( $a, b, 0, 1$ ), (b)Kw-Gamma( $a, b, 1, \alpha$ ), (c)Kw-Gumbel( $a, b, 0, 1$ ), (d) Kw-Ters Gaussian ( $a, b, 0, 1$ ) değerleri için Bozulma Oranı Fonksiyonu Grafikleri .....	25
<b>Şekil 16.</b> Farklı değerler için $KwNH$ dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonları ...	28
<b>Şekil 17.</b> Farklı değerler için $KwNH$ bozulma oranı fonksiyonu .....	31

## TABLULAR DİZİNİ

<b>Tablo 1.</b> $KwNH$ dağılımının seçilen parametre değerlerine göre beklenen değer, varyans, kovaryans, medyan, çarpıklık ve basıklık değerlerinin hesaplanması	33
<b>Tablo 2.</b> Bazı $a, b, \alpha, \beta$ değerleri için ortalama ve standart sapma değerleri .....	37
<b>Tablo 3.</b> Bazı $a, b, \alpha, \beta$ değerleri için ortalama ve standart sapma değerleri .....	38
<b>Tablo 4.</b> Bazı $a, b, \alpha, \beta$ değerleri için ortalama ve standart sapma değerleri .....	38
<b>Tablo 5.</b> $KwNH$ , $NH$ ve Üstel dağılım modellerinin sel taşkını veri kümesine ilişkin parametrelerin en çok olabirlik tahminleri, log-olabirlik, K-S değerleri ve tahminlere ilişkin standart hatalar .....	40

## SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
kdf	Kümülatif dağılım fonksiyonu
oyf	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
Kw-G	Kumaraswamy-G dağılım ailesi
Kw	Kumaraswamy dağılımı
$S(x)$	Yaşam Fonksiyonu
$h(x)$	Bozulma oranı fonksiyonu
$E(X)$	Beklenen değer
$f(x)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(x)$	Dağılım fonksiyonu
$Q(x)$	Ters fonksiyon
$Var(x)$	Varyans
$X_{(n)}$	n. Sıra istatistiği
$f_{X_n}(x)$	n. Sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$KwNH$	Kumaraswamy Nadarajah- Haghghi dağılımı
$ENH$	Üstelleştirilmiş Nadarajah- Haghghi dağılımı
$NH$	Nadarajah-Haghghi dağılımı
$E$	Üstel dağılım
$K-S$	Kolmogorov-Smirnov testi
sd	Standart hata

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Olasılık, istatistik analizi ile matematik arasında bağlantıyı sağlayan köprü durumundadır. Bu köprü olasılık dağılımları ile sağlanır. Olasılık dağılımları, olasılık incelemesi ve olayların olasılığının tanımlanması için kullanılan teorik modellerdir. Gerçek hayatta herhangi bir olayın olasılığını belirlemek istediğimizde o olayla ilgili koşullar bu teorik modellerden hangisine uygunsa olasılığın hesaplanmasında koşulları uygun olan o modelden yararlanılır. Olasılık kuramına göre, her bir rassal değişken için durum uzayında bir olasılık dağılımı olarak tanımlanan bir fonksiyon bağlanmıştır. Yani olasılık dağılımları olasılık ölçülerinin durum uzayındaki ifadeleridir. Verilerin sistemli bir şekilde toplanması ve bu verilerin değerlendirilip sonuç çıkarılması uygun bir veri modellemesi ile sağlanır. Dağılımlar bu verilerin uygun bir şekilde modellenmesini sağlar. Literatürde var olan birçok dağılım vardır. Bunlardan Kumaraswamy (1980) ( $Kw$ ) dağılımı hidroloji alanında önemli bir kullanım alanı bulmuştur. Daha sonra Jones (2009)' da  $Kw$  dağılımını derinlemesine incelemiş kökeni hakkında bilgi vererek genişletilmesini sağlamıştır. Cordeiro ve Castro (2011)' de ise kumaraswamy-G ( $Kw-G$ ) adı altında yeni bir dağılım ailesi ortaya atmıştır.  $Kw-G$  dağılım ailesi mühendislik ve biyolojide geniş çaplı uygulanmıştır. Nadarajah ve Haghghi (2011) ( $NH$ )' de ise üstel dağılımın genelleştirilmiş bir halini sunmuşlardır. Bu tezde  $Kw-G$  dağılım ailesinde dağılım fonksiyonu olarak  $NH$  dağılımı kullanılarak oluşturulan yeni bir dağılım incelenecektir. Kumaraswamy-Nadarajah ve Haghghi ( $KwNH$ ) olarak adlandırılacak olan bu yeni dağılımın incelenmesindeki temel amaç;  $NH$  dağılımından daha esnek bir dağılım elde edip, bu dağılımın veri uygulama alanını arttırmaktır. Bu tez 3 bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde; tezde kullanılan temel kavramlar ve bazı istatistiksel dağılım modelleri ile Kumaraswamy-G dağılım ailesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümünde; Kumaraswamy-G dağılım ailesi kullanılarak elde edilen yeni dağılım olan  $KwNH$  dağılımından bahsedilerek dağılımın özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümünde; yeni dağılım ile ilgili çeşitli uygulamalar yapılarak literatürdeki bazı dağılımlar ile karşılaştırılmıştır.

## 1.2. Literatür Özeti

Dağılımların esnekliğini arttırmak için literatürde çeşitli dağılım aileleri sunulmuştur. Bu dağılım ailelerinin bazıları (0,1) aralığındaki tanımlanmış dağılımlar sayesinde elde edilmiştir. (0,1) aralığında tanımlı olan Beta dağılımı kullanılarak, Eugene vd. (2002) tarafından Beta-G dağılım ailesi sunulmuştur. Beta-G dağılım ailesine ait kümülatif dağılım fonksiyonu (kdf) ve olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) sırasıyla;

$$F^{BG}(x) = I_{G(x)}(a, b) = \frac{B_{G(x)}(a, b)}{B(a, b)} = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$$

$$f^{BG}(x) = \frac{1}{B(a, b)} g(x) G(x)^{a-1} [1 - G(x)]^{b-1}$$

şeklinde verilir, burada;  $a, b > 0$ ,  $x \in (0,1)$ ,  $g(x) = dG(x)/dx$ ,  $G(x)$ , kök(baz) dağılımın kdf'si ve  $g(x)$ , kök dağılımın oyf'si ve

$$B_t(a, b) = \int_0^t t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt \quad (1)$$

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt \quad (2)$$

dir. Bu dağılım ailesi kullanılarak literatürdeki temel dağılımların biçim ve veri modellemesindeki esnekliğini arttırmak amacıyla birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin; Beta normal dağılımı (Eugene vd., 2002), Beta Üstel dağılımı (Maynard, 2003), beta gamma dağılımı (Kong, 2004), beta Gumbel dağılımı (Nadarajah ve Kotz, 2004), Beta Fréchet dağılımı (Nadarajah ve Gupta, 2004), Beta Weibull dağılımı (Sun, 2011), Beta Bessel dağılımı (Gupta ve Nadarajah, 2006), Beta Pareto dağılımı (Akinsete vd., 2008), Beta Rayleigh dağılımı (Akinsete ve Lowe, 2009), Beta Laplace dağılımı (Kozubowski ve Nadarajah, 2008), beta Maxwell dağılımı (Amusan, 2010), Beta Cauchy dağılımı (Alshawarbeh, 2011), Beta Burr XII dağılımı (Parana'iba vd., 2011), Beta genelleştirilmiş Pareto dağılımı (Mahmoudi, 2011), Beta genelleştirilmiş Weibull dağılımı (Singla vd., 2012), Beta genelleştirilmiş Gamma dağılımı (Cordeiro vd.,

2013a), Beta Nakagami dağılımı (Shittu ve Adepoju, 2013), Beta genelleştirilmiş ters Weibull dağılımı (Baharith vd., 2014), Beta genişletilmiş yarı normal dağılım (Cordeiro vd., 2014a), beta log-lojistik dağılımı (Lemonte, 2014), literatürde incelenmiş Beta-G dağılım ailesinin üyeleridir.

Bir başka dağılım ailesi olarak Cordeiro ve Castro, (2011) tarafından Kw-G dağılım ailesi sunulmuştur. Bu dağılım ailesinin kökeni daha çok hidroloji çalışmalarında kullanılan Kw(1980) dağılımıdır. Kw dağılımına ait kdf ve oyf sırasıyla

$$F(x) = [1 - (1 - x^a)^b] \quad (3)$$

$$f(x) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1} \quad (4)$$

şeklinde verilir. Burada;  $0 < x < 1$  ve  $a, b > 0$ , olup, dağılımın şekil parametreleridir. Kw dağılımı hakkında ayrıntılı bilgi için Jones (2009)' a bakılabilir. (3) ve (4) eşitliğindeki  $x$  yerine Kw-G dağılım ailesinin kdf ve oyf'si sırasıyla;

$$F(x) = 1 - [1 - G(x)^a]^b$$

$$f(x) = abg(x)G(x)^{a-1}(1 - G(x)^a)^{b-1}$$

şeklinde yazılarak verilir (Cordeiro ve Castro, 2011). Burada;  $g(x) = dG(x)/dx$ ,  $a, b > 0$ ,  $x \in (0,1)$   $G(x)$ , kök dağılımın kdf'si ve  $g(x)$ , kök dağılımın oyf'sidir. Kw-G dağılım ailesi ilerleyen konularda ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. İki biçim parametresi ile genişletilen bu dağılım ailesinin literatürdeki üyeleri; Kumaraswamy Weibull dağılımı (Cordeiro vd., 2010), Kumaraswamy genelleştirilmiş Gamma dağılımı (de Pascoa vd., 2011), Kumaraswamy çarpık normal dağılımı (Kazemi vd., 2011), (Mameli, 2012), (Mameli ve Musio, 2013), Kumaraswamy Gumbel minimum dağılımı (El-Sherpieny ve Ahmed, 2011), Kumaraswamylog-lojistik dağılımı (Santana vd., 2012), Muthulakshmi ve Selvi, 2013), Kumaraswamy Gumbel dağılımı (Cordeiro vd., 2012-a), Kumaraswamy Birnbaum-Sanders dağılımı (Saulo vd., 2012), Kumaraswamy genelleştirilmiş yarı-normal dağılımı (Cordeiro vd., 2012b), Kumaraswamy Ters Weibull dağılımı (Shahbaz vd., 2012), Kumaraswamy normal dağılımı (Correa vd., 2012), Kumaraswamy genelleştirilmiş Ters Weibull dağılımı (Yang, 2012), Kumaraswamy Pareto dağılımı (Bourguignon vd., 2013), Kumaraswamy genelleştirilmiş Pareto dağılımı (Nadarajah ve Eljabri, 2013), Kumaraswamy Burr XII

dağılımı (Parana'iba vd., 2013), Kumaraswamy genelleştirilmiş uç değer dağılımı (Eljabri, 2013), Kumaraswamy liner üstel dağılımı (Elbatal, 2013), Kumaraswamy genelleştirilmiş lineer bozulma oranı dağılımı (Elbatal, 2013), Kumaraswamy üstelleştirilmiş Pareto dağılımı (Elbatal, 2013c), Kumaraswamy Lomax dağılımı (Shams, 2013), üstelleştirilmiş log-lojistik (fisk) dağılımı (Zubair, 2013), üstelleştirilmiş genelleştirilmiş Burr III dağılımı (Zubair, 2013), Kumaraswamy modifiye Weibull dağılımı (Cordeiro vd., 2014b), Kumaraswamy genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı (Gomes vd., 2014), Kumaraswamy Üstel-Weibull dağılımı (Cordeiro vd., 2015a) olarak yazılabilir.

Bir diğer dağılım ailesi olarak Alexander vd. (2012) tarafından McDonald-G dağılım ailesi sunulmuştur. Bu dağılım ailesine ait kdf ve oyf sırasıyla;

$$F(x) = I_{G(x)^c}(a, b) = \frac{B_{G(x)^c}(a, b)}{B(a, b)} = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)^c} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$$

$$f(x) = \frac{c}{B(a, b)} g(x) G(x)^{ac-1} [1 - G(x)]^{b-1}$$

şeklindedir. Burada  $a, b, c > 0$  şekil parametreleri ve  $0 < x < 1$ ' dir. Bu dağılım ailesi kullanılarak yapılan çalışmalara örnek olarak; McDonald Kumaraswamy dağılımı (URL-1), McDonald üstel dağılım (Cordeiro vd., 2012-c), McDonald gamma dağılımı (Marciano vd., 2012), McDonald ters beta dağılımı (Cordeiro ve Lemonte, 2012), McDonald normal dağılımı (Cordeiro vd., 2012-d), McDonald üstel genelleştirilmiş dağılım (Cordeiro vd., 2012-e), McDonald Burr XII dağılımı (Gomes vd., 2015), McDonald Burr III dağılımı (Gomes vd., 2015), McDonald Lomax dağılımı (Lemonte ve Cordeiro, 2013), McDonald Birnbaum-Sanders dağılımı (Cordeiro vd., 2013-b), McDonald Fisk dağılımı (Zubair, 2013), McDonald Dagum dağılımı (Rajasoorya, 2013), (Oluyede and Rajasoorya, 2013), McDonald modified Weibull dağılımı (URL-2), McDonald arcsine dağılımı (Cordeiro ve Lemonte, 2014), McDonald Weibull dağılımı (Cordeiro vd., 2014-c), McDonald Burr dağılımı (Cordeiro vd., 2015b) ve The Kumaraswamy exponential-Weibull distribution (Cordeiro vd., 2015c) dağılımları verilebilir.

Yakın zamanlarda ise dağılımların iki yönlü bir sınıfı Korkmaz ve Genç, (2015) tarafından sunulmuştur. Bu aileye ait kdf ve oyf sırasıyla

$$F(x; \alpha, \beta, \xi) = \begin{cases} \beta^{1-\alpha} (G(x; \xi))^\alpha & -\infty < x < G_{(x; \xi)}^{-1}(\beta) \\ 1 - (1 - \beta)^{1-\alpha} (1 - G(x; \xi))^\alpha & G_{(x; \xi)}^{-1}(\beta) \leq x < \infty \end{cases}$$

$$f(x; \alpha, \beta, \xi) = \begin{cases} \alpha \beta^{1-\alpha} g(x; \xi) (G(x; \xi))^{\alpha-1} & -\infty < x < G_{(x; \xi)}^{-1}(\beta) \\ \alpha (1 - \beta)^{1-\alpha} g(x; \xi) (1 - G(x; \xi))^{\alpha-1} & G_{(x; \xi)}^{-1}(\beta) \leq x < \infty \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada  $0 \leq \beta \leq 1$  ve  $\alpha > 0$ 'dır.  $\xi$  ise kök dağılımdan gelen parametre vektörüdür. Yazarlar dağılımların iki yönlü bir sınıfını elde ederek iki yönlü genelleştirilmiş iki yönlü üstel, iki yönlü weibull, iki yönlü normal dağılımı ayrıntılı olarak incelemişlerdir.

Literatürde iyi bilinen genelleştirilmiş dağılım aileleri hakkında ayrıntılı bilgi almak için Tahir ve Nadarajah (2015)' e bakılabilir.

### 1.3. Temel Kavramlar

Bu kısımda, önereceğimiz yeni dağılımda kullanılacak olan bazı özellikler verilecektir.

#### 1.3.1. Beklenen Değer

**Tanım 1.3.1**  $X$  bir boyutlu sürekli bir rasgele değişken olsun ve  $f(x)$ ,  $X$ ' in oyf'si olmak üzere,  $X$ ' in beklenen değeri (ağırlıklı ortalaması),  $E(X)$ ;

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad -\infty < x < \infty$$

şeklinde tanımlanır (Akdeniz, 2002).



### 1.3.2. Moment

**Tanım 1.3.2**  $g(X) = X^k$  fonksiyonunun beklenen değerine  $X$  rasgele değişkeninin 0' a göre  $k$ -inci mertebeden momenti denir ve

$$m_k = E(X^k)$$

dır ( Akdeniz, 2002).

$X, f(x)$  oyf' ye sahip sürekli rasgele değişken ise  $k$ -inci mertebeden moment;

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

olur (Akdeniz, 2002).

**Tanım 1.3.3**  $E[(X - c)^k]$  beklenen değerine  $c$  noktasına göre  $k$ -inci mertebeden moment denir ve  $c = m_1 = E(X)$  alınırsa  $E[(X - E(X))^k]$  değerine beklenen değere (ortalamaya) göre  $k$ -inci mertebeden moment denir(Akdeniz, 2002).

**Tanım 1.3.4.** Beklenen değere göre momentlere merkezi momentler denir ve

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

ile gösterilir (Akdeniz, 2002).

### 1.3.3. Yaşam Fonksiyonu

Yaşam fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu belli bir aralıkta bozulmayı ifade ederler. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise belli bir zamanda bozulmayı ifade etmektedir ve anlık bir ölçümdür (Başar 1993).

Monoton azalan bir fonksiyon olan yaşam fonksiyonu;

$$S(x) = 1 - F(x) \quad (5)$$

şeklinde gösterilir.

#### 1.3.4. Bozulma Oranı Fonksiyonu

Bozulma oranı fonksiyonu,  $x$  zamanına kadar yaşadığı bilinen parçanın bundan sonraki  $[x, x + k]$  zaman aralığında bozulma olasılığının oranını ifade eder(Korkmaz, 2010).

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} \quad (6)$$

olarak tanımlanır.

#### 1.3.5. En Çok Olabilirlik Parametre Tahminleri

En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri elde etme yöntemleri arasında en yaygın olanıdır. Olabilirlik ilkesine dayanan bu yöntem ile elde edilen tahmin ediciler, tahmin edicilerde aranan özelliklerin bir çoğuna göre iyi olmakla birlikte elde edilmeleri sırasındaki en büyükleme (maksimizasyon) probleminin çözümünde sıkıntılar çekilmektedir(Öztürk vd., 2006).

**Tanım 1.3.5**  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  örnekleminin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,  $f(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$  olmak üzere  $X = x$  olarak gözlendiğinde  $\theta$ 'nın bir fonksiyonu olan,

$$L(\theta; x) = f(x; \theta) \quad , \theta \in \Theta$$

olabilirlik fonksiyonunu  $\Theta$  parametre kümesi üzerinde maksimum yapan  $\hat{\theta}(x)$  değerine, var olması halinde  $\theta$  nın en çok olabilirlik tahmini ve  $\hat{\theta}(X)$  istatistiğine de  $\theta$  nın *en çok olabilirlik tahmin edicisi* denir(Öztürk vd., 2006).

$\theta$  nın en çok olabilirlik tahmini ile  $\theta$  nın en çok olabilirlik tahmin edicisini aynı  $\hat{\theta}$  sembolü ile göstereceğiz. Buna göre,

$$L(\hat{\theta}; x) = \max_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

dır. Logaritma fonksiyonunun monotonluğu göz önüne alındığında,

$$\log L(\hat{\theta}; x) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta)$$

yazabiliriz. Bazı durumlarda  $\max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta)$  optimizasyon problemini çözmek daha kolay olmaktadır. Bu sebepten dolayı genellikle, olabilirlik fonksiyonu yerine onun doğal logaritması olan log-olabilirlik fonksiyonu da denen fonksiyon maksimize edilmektedir. Bazı durumlarda  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  çözümünü  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ler cinsinden ifade etmek mümkün olmakta, bazı durumlarda da mümkün olmamaktadır. Analitik çözüm elde edilemediğinde en çok olabilirlik tahmin edicisi biçimsel olarak bilinmemekte, yani örneklemin bir fonksiyonu olarak açık bir biçimde yazılamamaktadır. Böyle durumlarda, optimizasyon problemi belli bir algoritma ile çözümlenip parametrenin tahmini elde edilmektedir. Elde edilen tahmin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin taşıdığı özellikler açısından değerlendirilebilir. Zayıf koşulluluk durumunda sayısal yöntemler yuvarlatma hataları gibi sebeplerden dolayı gerçek çözümden çok uzak olan çözümler ortaya çıkabilir(Öztürk vd., 2006).

### 1.3.6. Sıra İstatistikleri

Sıra istatistikleri istatistikte çok geniş bir alanda kullanılmaktadır. Özellikle yüzdelliklerin hesaplanmasında, maksimum minimum değerler ile beraber ortanca değerlerin hesaplanmasında histogramların çizilmesinde (ki bu grafik yardımı ile dağılımın şekli hakkında bir ön bilgi elde edebiliriz) ve buna benzer birçok basit istatistik bilgilerin elde edilmesinde sıra istatistikleri kullanılmaktadır. Ayrıca, sıra istatistikleri, istatistiksel sonuç çıkarım açısından çok kullanışlı özelliklere sahiptir.  $X_1, X_2, \dots, X_n$

olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x; \theta)$  olan bir dağılımdan alınan bir örneklem ise, sıra istatistikleri;

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ,  $X_{(2)}$  = ikinci en küçük...  $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  olarak tanımlanmaktadır(Akdi Y., 2000). Buna göre, sıra istatistikleri için

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq \dots X_{(n)}$$

gösterimi kullanılmaktadır. Aşağıda verilen herhangi bir örneklemin sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları bir teorem halinde özetlenmiştir.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , dağılım fonksiyonu  $F(x)$ , olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x)$  olan bir kitleden alınan bir örneklem olsun,  $X_{(j)}$  sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_j}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(x) [F(x)]^{j-1} [1-F(x)]^{n-j}, x \in D_X \quad (7)$$

şeklinde tanımlanır(Akdi Y., 2000).

$X_{(1)}$  1. sıra istatistiğinin oyf' si;

$$f_{X_1}(x) = n[1-F(x)]^{n-1} f(x) \quad (8)$$

$X_{(n)}$  n. sıra istatistiğinin oyf' si;

$$f_{X_n}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) \quad (9)$$

şeklinde elde edilir( Akdi Y., 2000).

#### 1.4. Bazı Özel Sürekli Rasgele Dağılımlar Ve Özellikleri

Bu bölümde literatürdeki bazı özel dağılımlar,  $NH$  ve üstelleştirilmiş  $NH(ENH)$  dağılımları incelenecektir.

### 1.4.1. Normal Dağılım

İstatistikte çok önemli bir yer tutan normal dağılım, 1733' te De Moivre ve 1809'da Gauss tarafından sunulmuştur. Normal dağılıma ait oyf ve kdf' si sırasıyla;

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

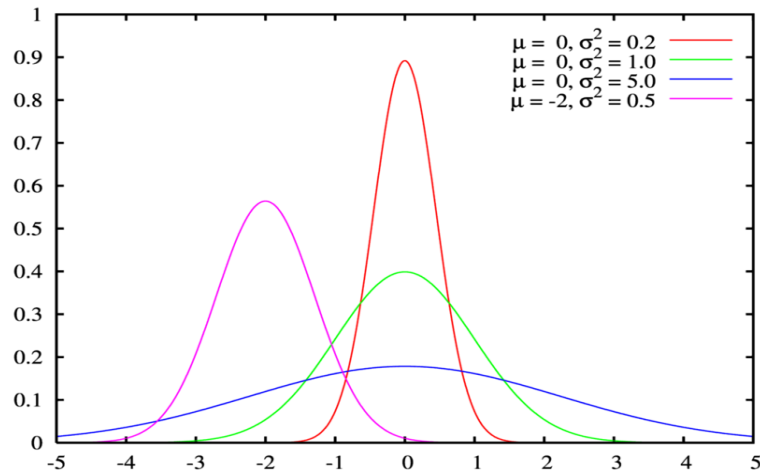
$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada ;  $\mu \in \mathbb{R}$  konum parametresi dağılımın ortalamasını,  $\sigma > 0$  ölçek parametresi dağılımın varyansını ve  $e= 2,71828$  ,  $\pi=3,14159$  değerlerini ifade etmektedir. Özel olarak;  $\mu = 0$  ve  $\sigma = 1$  alınırsa standart normal dağılım elde edilir. Standart normal dağılıma ait oyf ve kdf sırasıyla;

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (11)$$

gösterimi ile verilir. Şekil.1'de bazı değerler için oyf grafiği verilir.



**Şekil 1.** Normal dağılıma ait oyf grafiği. (Yeşil çizgi Standart Normal Dağılımı göstermektedir.)(URL-3)

### 1.4.2. Weibull Dağılımı

Weibull (1939) tarafından ortaya atılan ve *Weibull*  $(\lambda, \beta)$  şeklinde gösterilen Weibull dağılımı mühendislik ve biyoloji alanlarında önemli yer tutmuştur. Weibull dağılımı için  $X$  rasgele değişken olmak üzere dağılımın oyf ve kdf' si sırasıyla;

$$f(x; \beta; c) = c\beta^c x^{c-1} e^{-(\beta x)^c} \quad (12)$$

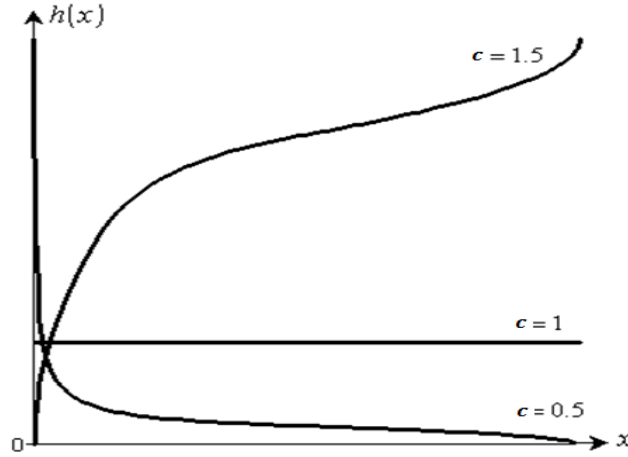
$$F(x) = 1 - e^{-(\beta x)^c} \quad (13)$$

biçimindedir. Burada,  $x, \beta, c > 0$ ' dır. Weibull dağılımına ait yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu;

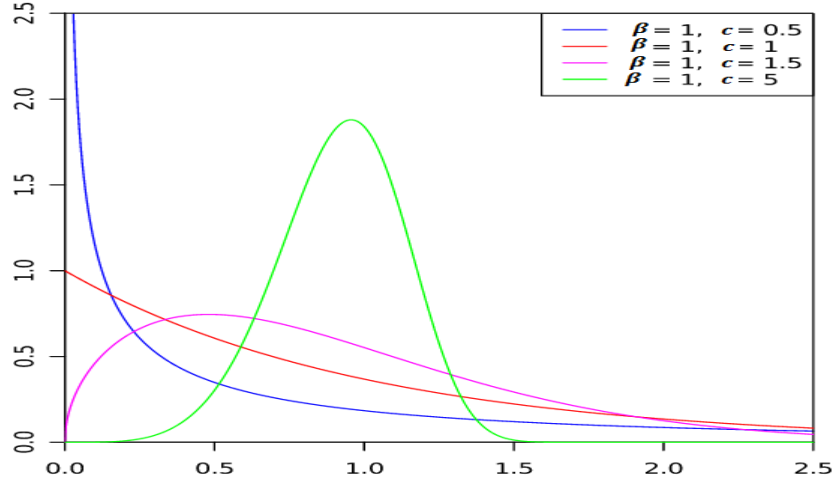
$$S(x) = e^{-(\beta x)^c}$$

$$h(x) = c\beta^c x^{c-1}$$

dir. Weibull dağılımına ait bozulma oranı grafiği ve oyf grafiği sırasıyla Şekil 2. ve Şekil 3.' te verilir.



Şekil 2. Farklı  $c$  ve  $\beta=0.5$  parametrelili Weibull dağılımına ait bozulma oranı grafiği



Şekil 3. Weibull dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği(URL-4).

### 1.4.3. Gamma Dağılımı

$X$  sürekli rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip olmak üzere oyl' si;

$$f(x) = \Gamma^{-1}(\beta) \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0, \lambda > 0, \beta > 0$$

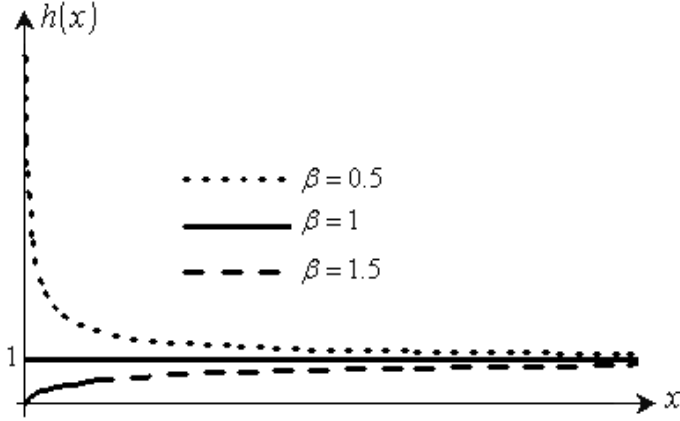
şeklindedir. Ayrıca Gamma dağılımına ait yaşam fonksiyonu, beklenen değer ve varyans sırasıyla;

$$S(x) = \Gamma^{-1}(\beta) \int_x^\infty \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x} dx$$

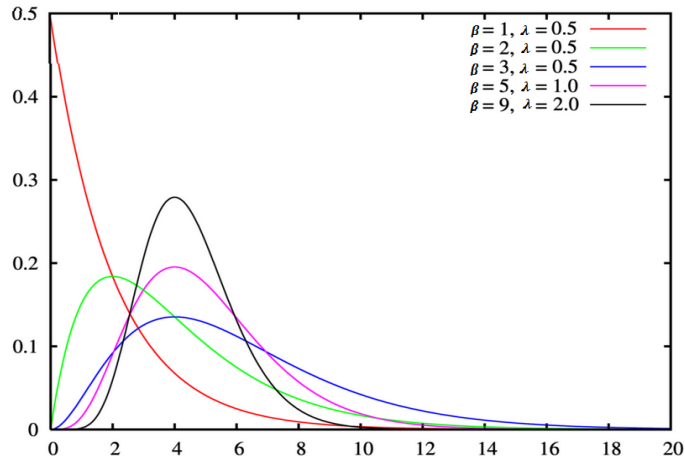
$$E(X) = \lambda\beta$$

$$Var(x) = \lambda^2\beta$$

şeklindedir.



Şekil 4.  $\beta=0.5, \beta=1, \beta=1.5$  ve  $\lambda=1$  için gamma dağılımına ait bozulma oranı grafiği



Şekil 5. Bazı değerler için gamma dağılımına ait oyf grafiği (URL-5).

Şekil 5.'te kolayca görüleceği gibi; Gamma dağılımı,  $\beta = 1$ ' de sabit bozulma oranına sahiptir çünkü  $\beta = 1$  için gamma dağılımı üstel dağılıma dönüşür. Ayrıca  $\beta < 1$  için azalan,  $\beta > 1$  için artan bozulma oranına sahiptir (Korkmaz, 2010).

#### 1.4.4. Üstel Dağılım(E)

Gamma ve Weibull dağılımının özel bir hali olan üstel dağılıma ait oyf ve kdf sırasıyla;

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x, \beta > 0$$

$$F(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$$



şeklindedir. İlk iki moment, varyans, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu sırasıyla;

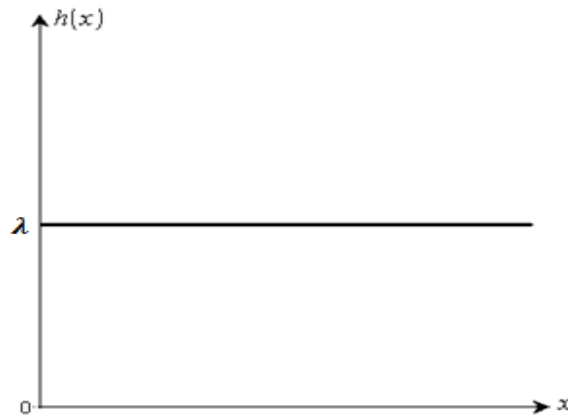
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

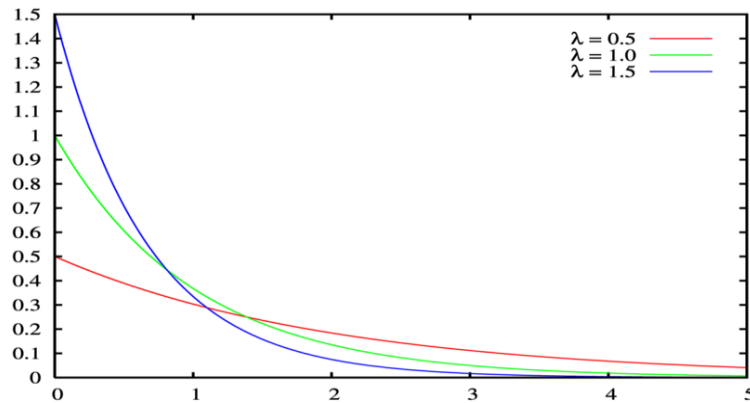
$$S(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$h(x) = \lambda$$

şeklindedir. Sabit bozulma oranına sahip olan üstel dağılıma ait bozulma oranı grafiği ve oyf grafiği sırasıyla Şekil 6. ve Şekil 7.'de verilir.



Şekil 6. Üstel dağılıma ait bozulma oranı grafiği



Şekil 7. Üstel dağılıma ait oyf grafiği (URL-6)

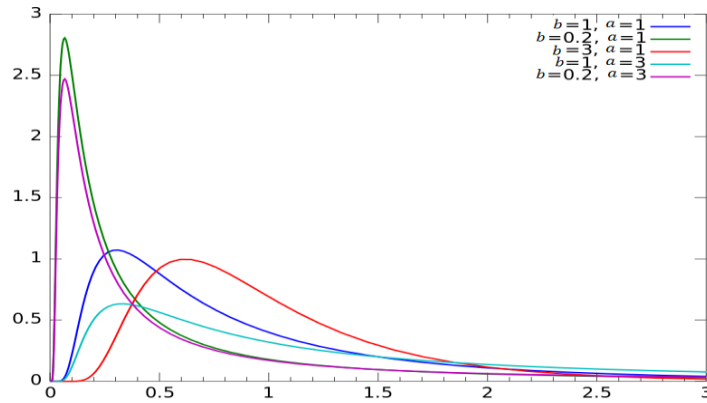
### 1.4.5. Ters Gaussian Dağılımı

Ters Gaussian dağılımına ait oyf ve kdf sırasıyla;

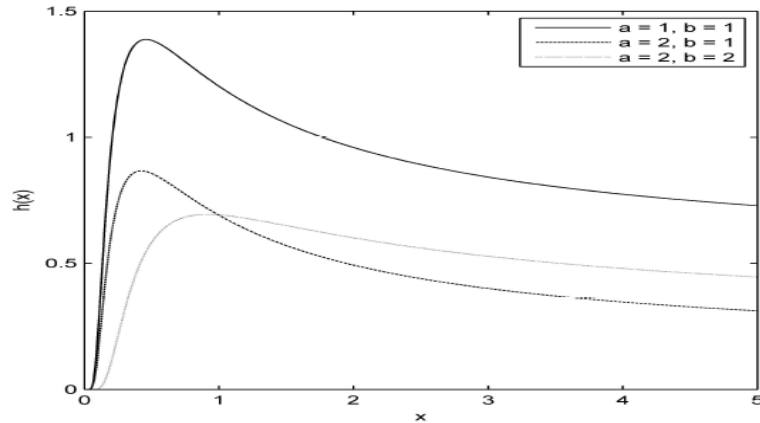
$$g(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi x^3}} e^{-\frac{b(x-a)^2}{2a^2x}}$$

$$G(x) = \varphi\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\left(\frac{x}{a} - 1\right)\right) + e^{\frac{2b}{a}} \varphi\left(-\sqrt{\frac{b}{x}}\left(\frac{x}{a} + 1\right)\right)$$

şeklinde verilir. Burada,  $x > 0$ ,  $a = E(X) > 0$ ,  $b = \frac{a^3}{Var(X)} > 0$  ve  $\varphi(\cdot)$ , (11)' de verilen standart normal dağılımdır (Rinne, 2014). Ters gaussian dağılımına ait oyf ve bozulma oranı fonksiyonu grafikleri Şekil 8. ve Şekil 9.'da sırasıyla verilir.



Şekil 8. Ters gaussian dağılımına ait oyf grafiği (URL-7)



Şekil 9. Ters gaussian dağılımına ait bozulma oranı fonksiyonu grafiği

#### 1.4.6. Gumbel Dağılımı

Gumbel dağılımına ait odf ve kdf sırasıyla;

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)}$$

$$G(x) = e^{-e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}$$

şeklindedir. Burada  $-\infty < x < \infty$  ve  $\sigma > 0$ 'dır. Bu dağılıma ait ortalama ve varyans sırasıyla  $\mu - \gamma\sigma$  ve  $\frac{\pi^2\sigma^2}{6}$ ,  $\gamma$  Euler sabitidir.

#### 1.4.7. Kumaraswamy dağılımı(Kw)

Kumaraswamy (1980) (Kw)'de sunmuş olduğu dağılım, güvenilirlik ve süre testi deneylerinde ve hidroloji alanında geniş bir kullanım alanı bulmuştur. (0,1) aralığında parametreleri  $a, b > 0$  olarak tanımlanan Kw dağılımına ait kdf ve odf sırasıyla;

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 - x^\alpha)^\beta \quad (14)$$

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1 - x^\alpha)^{\beta-1} \quad (15)$$

şeklindedir. Burada  $0 < x < 1$ ' dir. Bu dağılıma ait ters fonksiyon;

$$Q(x) = F^{-1}(y) = \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

şeklinde verilir. Burada  $0 < y < 1$ ' dir. Parametrelerin durumlarına göre;

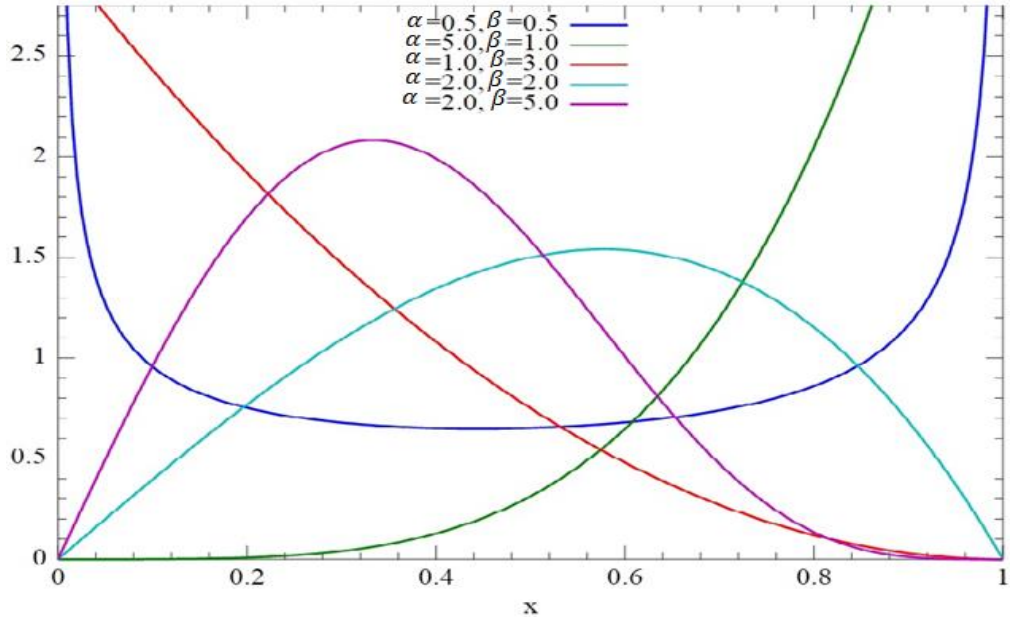
$\alpha > 1, \beta > 1 \Rightarrow$  tek tepeli;  $\alpha < 1, \beta < 1 \Rightarrow$  tek tepeli değildir;

$\alpha > 1, \beta \leq 1 \Rightarrow$  artan;  $\alpha \leq 1, \beta > 1 \Rightarrow$  azalan

$\alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow$  sürekli

durumlarında olur(Jones, 2009).

Bazı değerler için Kumaraswamy yoğunluklarına ait grafik Şekil 10.' da verilir.



Şekil 10. Bazı Kumaraswamy yoğunlukları. (URL-8)

#### 1.4.8. Üstel Dağılımın Genelleştirilmiş Bir Durumu

Üstel dağılımın genelleştirilmesiyle birçok yeni dağılım modeli bulunmuş ve incelenmiştir. Bunlardan biri olan Nadarajah ve Haghighi(2011) tarafından önerilen ve aşağıda kdf' si ve oyf' si verilen genel bir üstel dağılımdır. Bu dağılıma ait kdf ve oyf sırasıyla;

$$F_{NH}(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \quad (16)$$

$$f_{NH}(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \quad (17)$$

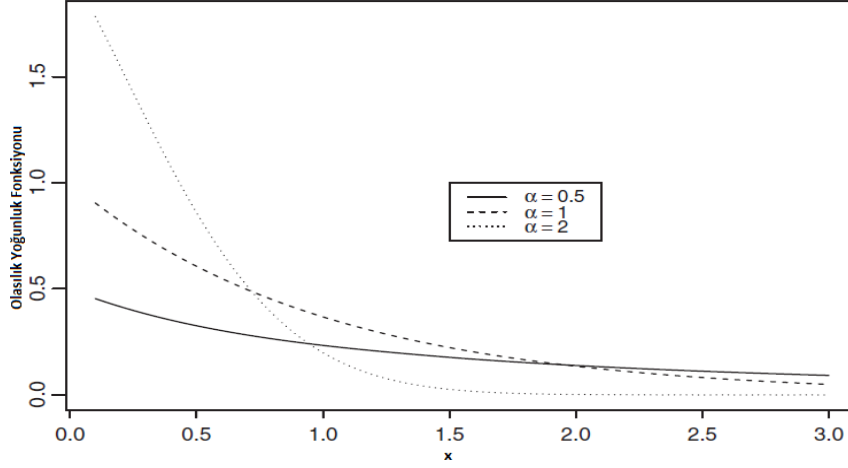
şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $\alpha, \beta, x > 0$  ' dır. Bu dağılım için  $NH$  gösterimi kullanılacaktır.  $\alpha = 1$  için bu dağılım üstel dağılıma indirgenir.  $NH$  dağılımına ait quantil fonksiyon, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu ve medyanı sırasıyla;

$$Q(p) = \frac{1}{\beta} \left[ (1 - \log(1 - p))^{\frac{1}{\alpha}} \right], \quad 0 < p < 1$$

$$S_{NH}(x; \alpha, \beta) = S(x) = e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \quad (18)$$

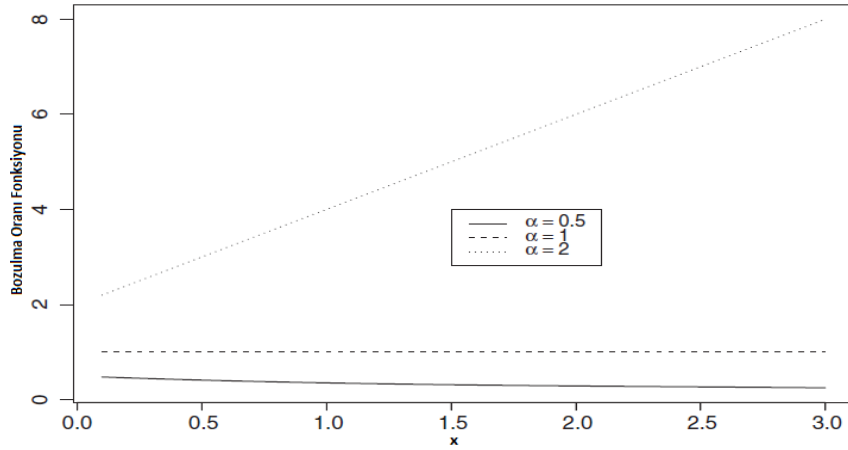
$$h_{NH}(x; \alpha, \beta) = h(x) = \alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1} \quad (19)$$

şeklinde verilir. Yapı olarak üstel dağılıma benzeyen bu dağılıma ait oyf grafiği Şekil 11.'de verilir.  $\alpha = 1$  için bu dağılım üstel dağılıma indirgenir.



**Şekil 11.**  $\beta=1$  ve  $\alpha=0.5,1,2$  değerleri için  $NH$  olasılık yoğunluk fonksiyonu

Bozulma oranı fonksiyonu grafiği ise Şekil 12.'de verilir.



**Şekil 12.**  $\beta=1$  ve  $\alpha=0.5,1,2$  değerleri için  $NH$  Bozulma oranı fonksiyonu

Şekil.12' den artan, azalan ve sabit bozulma oranı fonksiyonu görülmektedir. Bu özellik ise bozulma oranı fonksiyonu sabit olan üstel dağılıma göre bir avantajdır.

#### 1.4.9. Üstelleştirilmiş $NH$ Dağılımı

Lemonte (2013) tarafından  $NH$  dağılımının genelleştirilmiş bir hali olan Üstelleştirilmiş  $NH(ENH)$  dağılımı sunulmuştur.  $ENH$  dağılımına ait kdf ve odf sırasıyla;

$$F_{ENH}(x; \alpha, a, \beta) = F(x) = [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^a \quad (20)$$

$$f_{ENH}(x; \alpha, a, \beta) = f(x) = \alpha a \beta (1 + \beta x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha} [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^{a-1} \quad (21)$$

şeklinde verilir. Burada  $x, a, \alpha, \beta > 0$ 'dır. Bu dağılıma  $a = 1$  için  $NH$  dağılımına dönüşür.  $NH$  dağılımına bir biçim parametresi eklenerek elde edilen bu dağılım,  $NH$  ve üstel dağılımdan daha esnektir. Oyf' nin biçim yönünden incelenmesi Lemonte(2013) tarafından aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{d \log[f(x)]}{dx} = \frac{(\alpha - 1)\beta - \alpha\beta(1 + \beta x)^\alpha}{1 + \beta x} + \frac{\alpha\beta(a - 1)(1 + \beta x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}$$

$ENH$  olasılık yoğunluk fonksiyonu  $\alpha < 1$  ve  $a < 1$  için log-konveks,  $\alpha > 1$  ve  $a > 1$  için log-konkav olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 0, & a > 1 \\ \alpha\beta, & a = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

olur.

$ENH$  dağılımına ait bozulma oranı fonksiyonu ise;

$$h_{ENH}(x) = \alpha\beta a \frac{(1 + \beta x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha} [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^{a-1}}{1 - [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^a}, x > 0 \quad (22)$$

şeklinde verilir. Herhangi bir  $\beta > 0$  için;  $\alpha > 0, a > 0$  olduğunda  $ENH$  artan bir bozulma oranına sahip,  $\alpha < 0, a < 0$  olduğunda  $ENH$  azalan bir bozulma oranına sahip ve  $a = \alpha = 1$  olduğunda ise sabit bir bozulma oranına sahip olur.

$$\frac{d \log[h(x)]}{dx} = \frac{(\alpha - 1)\beta - \alpha\beta(1 + \beta x)^\alpha}{1 + \beta x} + \frac{\alpha\beta(a - 1)(1 + \beta x)^{\alpha-1}e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}} + \frac{\alpha\beta a(1 + \beta x)^{\alpha-1}e^{1-(1+\beta x)^\alpha} [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^{a-1}}{1 - [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^a} \quad (23)$$

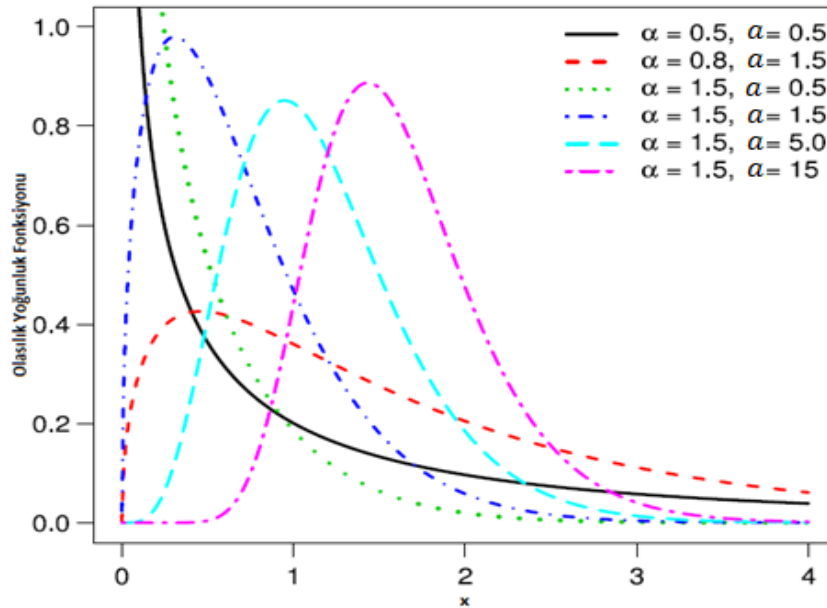
Bozulma oranı fonksiyonu bir mod yada anti-mod' a sahip olabilir. Şekil 13.'te bu dağılıma ait oyf grafiği verilir.

Dağılıma ait quantil fonksiyonu, medyanı ve yaşam fonksiyonu sırasıyla;

$$Q(x) = \beta^{-1} \left\{ \left[ 1 - \log \left( 1 - x^{\frac{1}{a}} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right\}, \quad x \in (0,1) \quad (24)$$

$$S_{ENH}(x; \alpha, \beta, a) = 1 - [1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}]^a$$

şeklinde verilir.



Şekil 13. Bazı değerleri için  $ENH$  olasılık yoğunluk fonksiyonu

### 1.5. Dağılımların Genel Bir Ailesi: Kumaraswamy-G Dağılım Ailesi

Bu alt başlıkta önereceğimiz yeni dağılımın temelini oluşturan ve iki biçim parametresi ile dağılımları esneklik yönünden zenginleştiren Kw-G dağılım ailesi (Cordeiro ve Castro, 2011) tanıtılmaktadır. Ailenin özellikleri ispatsız şekilde verilecektir. Kw-G dağılım ailesine ait kdf ve oyf sırasıyla;

$$G(x; \gamma) = [1 - (1 - (G(x)^a)^b)] \quad a, b > 0 \quad (25)$$

$$g(x; \gamma) = abg(x)G(x)^{a-1}(1 - G(x)^a)^{b-1} \quad a, b > 0 \quad (26)$$

şeklinde sunulmuştur. Burada  $x \in \mathbb{R}, a, b > 0$ ,  $G(x)$  kök dağılımın kdf'si,  $g(x)$ , kök dağılımın oyf ve  $\gamma$  kök dağılımdan gelen parametre vektörüdür.  $G(x)$  dağılımı, elde edilen Kw-G dağılımının  $(0,1)$  aralığında  $a = b = 1$  için kök dağılımını verir. Kw-G dağılım ailesinden elde edilen dağılımlar  $G(x)$  dağılımdan daha esnek yapıya sahip olurlar(Cordeiro ve Castro, 2011). Literatürde birçok Kw-G dağılımı sunularak incelenmiştir. Bunlar giriş kısmında verilir. Kw-G dağılım ailesinin bazı özellikleri Cordeiro ve Castro (2011)' den alınarak aşağıdaki gibi verilir. Buna göre dağılım ailesinin  $r$ . merkezi momenti;

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} abx^r g(x)G(x)^{a-1}\{1 - G(x)^a\}^{b-1} dx, \quad r = 0,1,2 \quad (27)$$

eşitliği ile verilir.

$x_1, x_2 \dots x_n$  Kw-G dağılım ailesinden alınan  $n$  birimlik örneklem olsun. Buna göre örneklemin olabirlik fonksiyonu,  $\ell = \ell(\theta)$  model parametresi için (26)' dan ;

$$\begin{aligned} \ell(\theta) = n\{\log(a) + \log(b)\} + \sum_{i=1}^n \log\{g(x_i; \gamma)\} + (a-1) \sum_{i=1}^n \log\{G(x_i; \gamma)\} \\ + (b-1) \sum_{i=1}^n \log\{1 - G(x_i; \gamma)^a\} \end{aligned} \quad (28)$$

şeklindedir. Burada;  $\theta = (a, b, \gamma)$  parametre vektörüdür. Parametrelere göre kısmi türevler alırsak;



$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \log\{G(x_i; \gamma)\} \left\{ 1 - \frac{(b-1)G(x_i; \gamma)^a}{1 - G(x_i; \gamma)^a} \right\} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial b} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \log\{1 - G(x_i; \gamma)^a\} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{g(x_i; \gamma)} \frac{\partial g(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} + \frac{1}{G(x_i; \gamma)} \frac{\partial G(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} \left\{ 1 - \frac{a(b-1)}{G(x_i; \gamma)^{-a} - 1} \right\} \right] = 0 \quad (31)$$

normal denklemleri elde edilir. Burada;  $j = 1, \dots, p$  ' dir. Bu denklemlerin analitik çözümleri kolay elde edilemeyebilir. Bu nedenle Newton - Raphson gibi nümerik dağılımlar veya bilgisayar paket programlardaki nümerik yaklaşımlı çözümler kullanılmalıdır.

Kw-G dağılım ailesi için  $i$ 'inci mertebeden sıra istatistikleri;

$$\begin{aligned} f_{i,n}(x) &= \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} F(x)^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} \\ &= \frac{ab}{B(i, n-i+1)} g(x) G(x)^{i-1} [1 - \{1 - G(x)^a\}^b] \{1 - G(x)^a\}^{b(n-i+1)-1} \end{aligned}$$

Burada  $B(.,.)$  eşitlik (2)' de verilen beta fonksiyonu ve  $i = 1, 2, \dots, n$  ' dir. Ayrıca yazarlar tarafından  $i$ . sıra istatistiğinin oyf'si;

$$f_{i,n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1}$$

şeklinde verilir.

Yazarlar tarafından bu çalışmada önerilen bazı Kw-G dağılımları aşağıda verilir.

### 1.5.1. Kw-Normal Dağılım (KwN)

KwN dağılımının oyf ve kdf'si sırasıyla;

$$f(x) = \frac{a}{b} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left\{ \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\}^{a-1} \left\{ 1 - \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^a \right\}^{b-1}$$

$$F(x) = 1 - \left\{ 1 - \left( \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right)^a \right\}^b$$

şeklindedir. Burada;  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  konum parametreleri,  $\sigma > 0$  ölçü parametresi,  $a, b > 0$  şekil parametreleri ve  $\phi(\cdot), \varphi(\cdot)$  sırasıyla (10) ve (11)' de verilen standart normal dağılıma ait oyf ve kdf'yi ifade eder.

### 1.5.2. Kw-Weibull Dağılımı (KwW)

Weibull dağılımına ait eşitlik (13)'te verilen kdf' yi, Kw-G dağılım ailesinde  $G(x)$  yani kök dağılım kabul ederek uygulandığında elde edilen yeni dağılımın yani Kw-Weibull (KwW) dağılımının kdf ve oyf' si sırasıyla;

$$F(x) = 1 - \left( 1 - \left[ 1 - e^{-(\beta x)^c} \right]^a \right)^b$$

$$f(x) = abc\beta^c x^{c-1} e^{-(\beta x)^c} \left[ 1 - e^{-(\beta x)^c} \right]^{a-1} \left\{ 1 - \left[ 1 - e^{-(\beta x)^c} \right]^a \right\}^{b-1}$$

şeklinde elde edilir. Burada;  $x, a, b, \beta, c > 0$  ayrıca  $c = 1$  için Kw-üstel dağılıma dönüşür.

### 1.5.3. Kw- Gamma Dağılımı (KwGa)

KwGa( $a, \alpha, \beta, b$ ) dağılımına ait oyf;

$$f(x) = \frac{ab\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)^{ab}} \Gamma_{\beta x}(\alpha)^{a-1} \left\{ \Gamma(\alpha)^a - \Gamma_{\beta x}(\alpha)^a \right\}^{b-1}, x, a, b, \beta, c > 0$$

şeklindedir. Burada  $\Gamma(\cdot)$  Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0$$

$$\Gamma_z(\alpha) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0$$

$$G(y) = \frac{\Gamma_{\beta y}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, y, \alpha, \beta > 0$$

dır.  $\alpha = 1$  için Kw-üstel dağılım elde edilir.

#### 1.5.4. Kw-Ters Gaussian Dağılımı (KwIG)

Stansinopoulos ve Rigby, (2007) parametrizasyonu ile verilen ters Gaussian dağılımına ait oyf ve kdf sırasıyla;

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2\sigma^2x}}$$

$$G(x) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + e^{\frac{2}{\mu\sigma^2}} \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{\sigma^2x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right)$$

şeklindedir. Burada  $x, \mu, \sigma > 0$  ve  $\varphi(\cdot)$ , (11)' de verilen standart normal dağılım, beklenen değer  $\mu$ , varyansı  $\sigma^2\mu^3$ , tür. Kısaca  $KwIG(a, b, \mu, \sigma^2)$  olarak gösterilen Kumaraswamy ters gaussian dağılımı elde edilir.

#### 1.5.5. Kumaraswamy-Gumbel Dağılımı (KumGum)

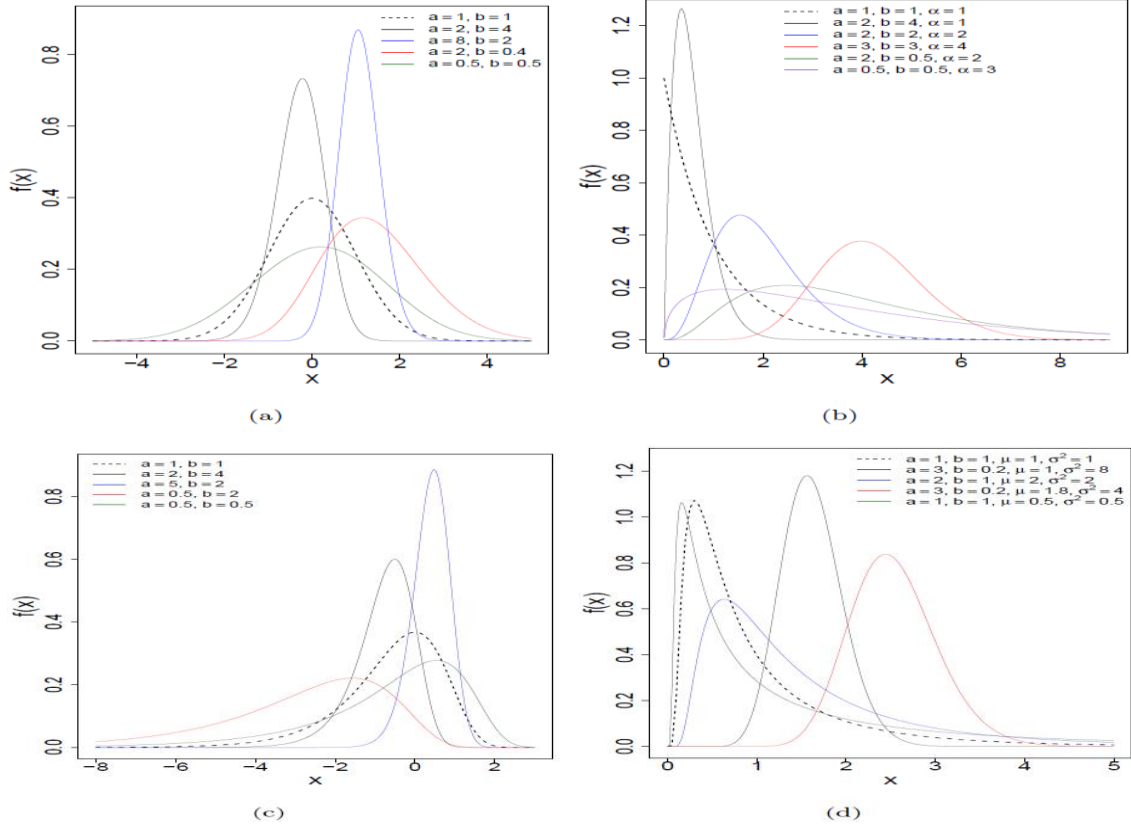
Gumbel dağılımına ait oyf ve kdf sırasıyla;

$$g(x) = ab\sigma^{-1}ue^{-au}(1 - e^{-au})^{b-1}$$

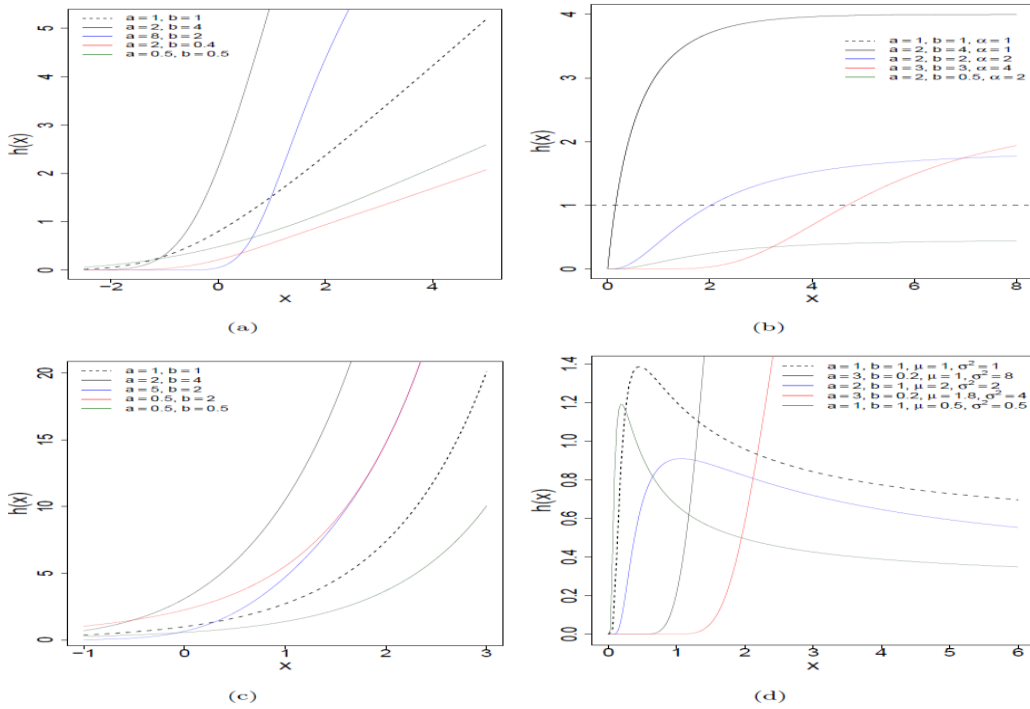
$$G(x) = 1 - (1 - e^{-au})^b$$

şeklindedir. Burada;  $G_{\mu,\sigma}(x) = e^{-u}$  ve  $g_{\mu,\sigma}(x) = \sigma^{-1}ue^{-u}$ ,  $-\infty < x, \mu < \infty, \sigma > 0$ ,  $u = e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}$  olarak tanımlanır.

Şekil 14. ve Şekil 15.' te bazı Kw-G dağılımlarına ait sırasıyla oyf ve bozulma oranı fonksiyonu grafikleri verilerek bu grafikler üzerindeki esneklik gösterilmektedir.



**Şekil 14.** (a) Kw-Normal  $(a,b,0,1)$ , (b) Kw-Gamma  $(a,b,1,\alpha)$ , (c) Kw-Gumbel  $(a,b,0,1)$ , (d) Kw-Ters Gaussian  $(a,b,0,1)$  değerleri için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu



**Şekil 15.** (a) Kw-Normal  $(a,b,0,1)$ , (b) Kw-Gamma  $(a,b,1,\alpha)$ , (c) Kw-Gumbel  $(a,b,0,1)$ , (d) Kw-Ters Gaussian  $(a,b,0,1)$  değerleri için Bozulma Oranı Fonksiyonu Grafikleri

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde 1.5.'te tanıtılan Kw-G dağılım ailesi ile 1.4.8' de verilen *NH* dağılımı kullanılarak kısaca *KwNH* olarak adlandırılacak olan yeni bir dağılım tanıtılarak özellikleri incelenecektir.

### 2.1. Kumaraswamy -Nadarajah ve Haghghi Dağılım Ailesi

Bu bölüm eşitlik (16), (17), (25) ve (26) kullanılarak *KwNH* dağılımına ait kdf ve oyf sırasıyla;

$$F(x) = 1 - \left[1 - (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a\right]^b \quad (32)$$

$$f(x) = ab\alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1} \left[1 - (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a\right]^{b-1} x \quad (33)$$
$$x (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha}$$

şeklinde elde edilir. Burada;  $x > 0, a, b, \alpha, \beta > 0$  'dır.  $a, b, \alpha$  dağılımın biçim,  $\beta$  ise konum parametresidir. Bu dağılım için *KwNH*( $a, b, \alpha, \beta$ ) gösterimi kullanılacaktır. Şekil 16.'da *KwNH* dağılımının üstel ve *NH* dağılımlarından daha esnek bir yapıya sahip olduğu görülebilir.

#### 2.1.1. Dağılımın Özel Durumları

1.  $b = 1$  için  $F(x) = (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a$  olan ENH dağılımı elde edilir.

2.  $a = 1$  için yeni bir  $F(x) = 1 - e^{b(1-(1+\beta x)^\alpha)}$  olana *KwNH* ( $1, b, \alpha, \beta$ ) parametrelerine sahip yeni üstel dağılım elde edilir.

3.  $\alpha = 1$  için  $F(x) = 1 - [1 - (1 - e^{-\beta x})^a]^b$  Kw-Exp dağılımı elde edilir. (Cordeiro ve Castro, 2011) .

4.  $a = 1$  ve  $b = 1$  için *NH* üstel dağılımı elde edilir.

5.  $a = 1, b = 1$  ve  $\alpha = 1$  için Üstel dağılım elde edilir.

*KwNH* dağılımının oyf' sinin şekil yönünden incelenmesi için logaritmasından faydalanılır bunun nedeni ise türevleri alınırken kolaylık sağlamasıdır.

$$\log f(x) = \log a + \log b + \log \alpha + \log \beta + (\alpha - 1) \log(1 + \beta x) + (b - 1)$$

$$\begin{aligned} & \log \left( 1 - (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a \right) + (a - 1) \log(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}) + 1 - (1 + \beta x)^\alpha \\ & = \log a + \log b + \log \alpha + \log \beta + 1 - (1 + \beta x)^\alpha + (\alpha - 1) \log(1 + \beta x) + (b - 1) \end{aligned}$$

$$\log \left( 1 - (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a \right) + (a - 1) \log(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})$$

Birinci türevi için;

$$\begin{aligned} \frac{d \log f(x)}{dx} &= -\alpha \beta (1 + \beta x)^{\alpha-1} + \frac{(\alpha - 1) \beta}{1 + \beta x} + \frac{(a - 1) \alpha \beta (1 + \beta x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})} \\ &\quad - \frac{(b - 1) \alpha \beta (1 + \beta x)^{\alpha-1} (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^{a-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{(1 - (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a)} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan parametrenin durumlarına göre oyf değişik biçimlerde bulunabilir.

$$\Rightarrow \frac{(\alpha - 1) \beta}{1 + \beta x} - \alpha \beta (1 + \beta x)^{\alpha-1} - (b - 1) h_{ENH}(x; \alpha, \beta, a) + (a - 1) \frac{f_{NH}(x; \alpha, \beta)}{F_{NH}(x; \alpha, \beta)}$$

$\alpha < 1, a < 1, \beta < 0$  için;  $h_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)$  Lemonte(2013)'ten dolayı azalandır.

$\alpha < 1, a < 1, \beta < 0$  için;  $\frac{f_{NH}(x; \alpha, \beta)}{F_{NH}(x; \alpha, \beta)}$  Nadarajah ve Haghighi(2011) makalesinden dolayı azalandır.

Diğer durumlar için olasılık yoğunluk fonksiyonu bir moda sahip olabilir. Buna bağlı olarak ikinci türev alınırsa;

$$\frac{d^2 \log f(z)}{dz} = \frac{-(\alpha-1)}{\alpha z^2} - \frac{(\alpha-1)e^{1-z}}{(1-e^{1-z})^2} - \frac{a(b-1)(1-e^{1-z})^\alpha \left( a-e^{z-1} \left( 1 - ((1-e^{1-z})^2) \right) \right)}{(1-(1-e^{1-z})^\alpha)^2 (1-e^{z-1})^2}$$

olarak elde edilir. Burada  $z = (1 + \beta x)^\alpha$  dır. Buradan;

$\alpha < 1, a < 1, \beta < 0$  için;  $\frac{d^2 \log f(z)}{dz} > 0$  olduğundan log-konveks olur,

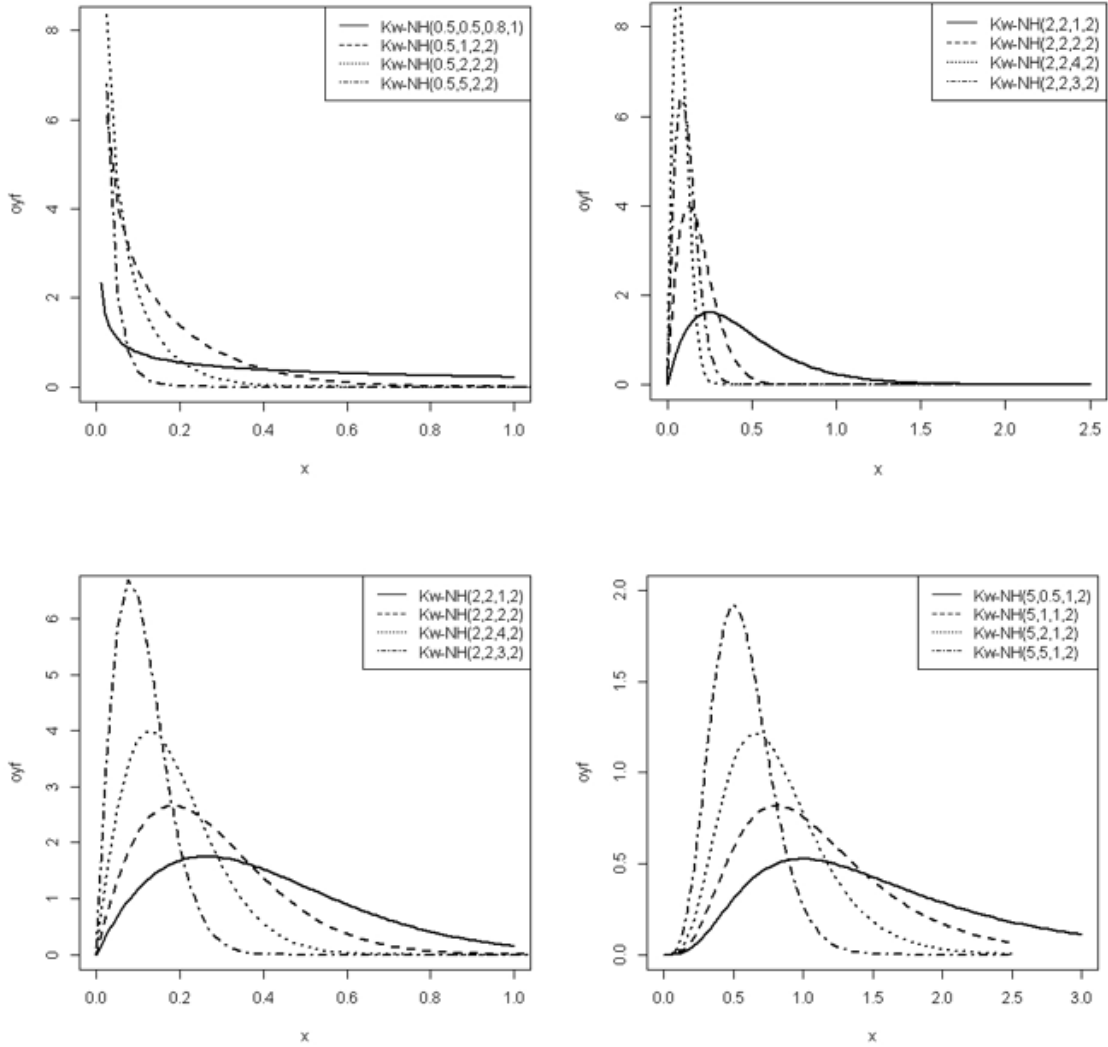
$\alpha > 1, a > 1, \beta > 0$  için;  $\frac{d^2 \log f(z)}{dz} > 0$  olduğundan log-konkav olur.

Bu çözümler yapılırken Lemonte(2013)' ten yararlanılmıştır.

Ayrıca Şekil 16.'dan;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x; a, b, \alpha, \beta) = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 0, & a > 1, b > 1 \end{cases}$$

olduğu görülebilir.



Şekil 16. Farklı değerler için  $KwNH$  dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonları

## 2.2. Ters Fonksiyon

(32)'de verilen  $KwNH$  dağılım fonksiyonunu kullanarak ters fonksiyonu;

$$\frac{\left(1 - \log\left(1 - \left(1 - (1 - p)^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{a}}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{\beta} = Q(x) \quad (34)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $p \in \mathbb{R}$  sabit ve  $a, b, \alpha, \beta, x > 0$ ' dir. (34)'de yer alan  $p$  yerine  $(0,1)$  aralığındaki düzgün dağılımdan gelen bir sayı verilirse  $KwNH$  dağılımından rasgele bir sayı üretilmiş olunur.

## 2.3. Yaşam Fonksiyonu

(5)' te verilen  $F(x)$  yerine  $KwNH$  dağılım fonksiyonu yazılırsa

$$S(x) = \left[1 - \left(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}\right)^a\right]^b \quad (35)$$

olur.

## 2.4. Bozulma Oranı Fonksiyonu

Kw-G dağılım ailesi için (6)'da verilen bozulma oranı fonksiyonunu  $KwNH$  dağılımında uygulayalım. O halde  $KwNH$  dağılım ailesinin bozulma oranı fonksiyonu

$$h(x) = \frac{ab\alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1}\left(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}\right)^{a-1}e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{1 - \left(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha}\right)^a} \quad (36)$$

şeklinde olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x; a, b, \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \infty, & a < 1 \\ b\alpha\beta, & a = 1 \end{cases}$$



$a = 1$  için;

$$h(x) = \frac{b\alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1}e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{e^{1-(1+\beta x)^\alpha}} = b\alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = b\alpha\beta$$

bozulma oranı fonksiyonu sabit olan tek dağılım üstel dağılımdır.  $a = 1$  için  $KwNH$   $(1, b, \alpha, \beta)$  dağılımı elde edilir. Bozulma oranı sabit olduğu için üstel dağılımın yine genelleştirilmiş bir hali elde edilir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x; a, b, \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \\ ab\beta, & \alpha = 1 \end{cases}$$

#### 2.4.1. Bozulma oranı fonksiyonunun şekil yönünden incelenmesi

Bozulma oranı fonksiyonunu incelerken olasılık yoğunluk fonksiyonundaki gibi logaritması alınarak türevlerine bakılır. (36)'da verilen  $KwNH$  dağılımına ait bozulma oranı fonksiyonunun logaritması alınır;

$$h(x) = \frac{ab\alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1}(1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^{a-1}e^{1-(1+\beta x)^\alpha}}{1 - (1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha})^a}$$

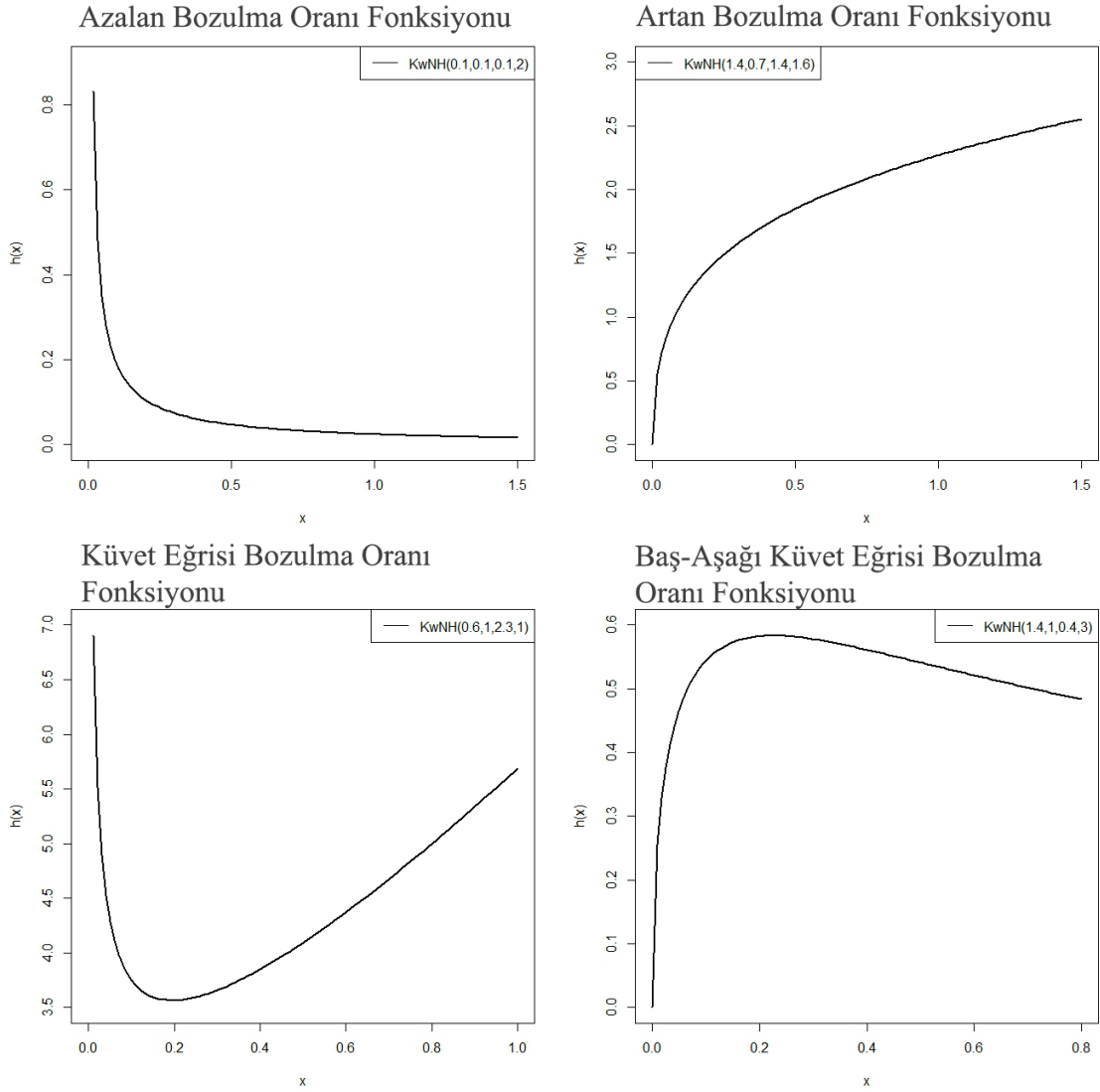
$$\log h(x) = \log a + \log b + \log \alpha + \log \beta + (\alpha - 1) \log(1 + \beta x) + 1 - (1 + \beta x)^\alpha + (a - 1) \log F_{NH}(x; \alpha, \beta) - a \log S_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \log h(x)}{dx} &= \frac{\beta(\alpha - 1)}{(1 + \beta x)} + (a - 1) \frac{f_{NH}(x; \alpha, \beta)}{F_{NH}(x; \alpha, \beta)} - \alpha\beta(1 + \beta x)^{\alpha-1} \\ &+ \frac{f_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)}{S_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{f_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)}{S_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)} = h_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)$$

$F_{NH}(x; \alpha, \beta)$ ,  $S_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)$  ve  $h_{ENH}(x; \alpha, \beta, a)$  sırasıyla (16) ve (24) ve (22)'de verilir.

$\alpha < 1$  ve  $a < 1$  için; Lemonte (2013)'ten dolayı  $h(x)$  azalandır ve parametrelerin çeşitlerine göre artan, azalan, küvet Eğrisi, U biçiminde, tek tepeli bozulma oranı grafiklerine sahip olabilirler. Şekil 17.'de  $KwNH$  dağılımı için bozulma oranı fonksiyonu grafikleri verilir.



**Şekil 17.** Farklı değerler için  $KwNH$  bozulma oranı fonksiyonu

## 2.5. Moment

$KwNH$  dağılım ailesinin momentleri hesaplanırken Cordiero ve Castro (2011)'de  $Kw-G$  dağılım ailesinin (27)' de verilen moment hesabından yararlanır.

$$G(x)^a = u \Rightarrow x = G^{-1}(u^{\frac{1}{a}}) \quad (38)$$

$$G(x)^a = u \Rightarrow a \cdot g(x)G(x)^{a-1}dx = du \quad (39)$$

dönüşümleri yapılarak elde edilen (38) ve (39), (27)'de yerine yazılırsa;

$$E(X^r) = b \int_0^{\infty} \left[ G^{-1}(u^{\frac{1}{a}}) \right]^r (1-u)^{b-1} du \quad (40)$$

(16)'de verilen  $NH$  dağılım fonksiyonu  $z$  olsun. O halde ;

$$G(x) = 1 - e^{1-(1+\beta t)^\alpha} = z$$

$$\Rightarrow \frac{(1 - \log(1 - z))^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{\beta} = x = G^{-1}(u^{\frac{1}{a}}) \quad (41)$$

şeklinde olur. Bulunan (41)'deki bu eşitlik (40)'da yerine yazılırsa;

$$E(X^r) = b \int_0^{\infty} \left[ \frac{(1 - \log(1 - z))^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{\beta} \right]^r (1-u)^{b-1} du \quad (42)$$

elde edilir. Bazı  $(\alpha, \beta, a, b)$  değerleri için beklenen değer varyans, kovaryans, medyan, çarpıklık ve basıklık değerlerinin hesaplaması Tablo.1 (EK-1)'de verilmiştir.

**Tablo 1.**  $KwNH$  dağılımının seçilen parametre değerlerine göre beklenen değer( $E(X)$ ), varyans ( $V$ ), standart hata ( $CV$ ), medyan, çarpıklık ve basıklık değerlerinin hesaplanması

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$	$E(X)$	$V$	$CV$	Medyan	Çarpıklık	Basıklık
0,5	0,5	0,5	0,5	17,5386	1418,2550	2,1472	4,6735	6,3543	80,8733
			1	8,7693	354,5638	2,1473	2,3368	6,3543	80,8732
			2	4,384642	88,64096	2,147253	1,168377	6,35429	80,87328
			5	1,753857	14,18255	2,147253	0,4673509	6,35429	80,87328
		1	0,5	3,014198	13,93495	1,238457	1,653357	2,298232	10,64922
			1	1,507099	3,483738	1,238457	0,8266786	2,298232	10,64922
			2	0,7535495	0,8709344	1,238457	0,4133393	2,298232	10,64922
			5	0,3014198	0,1393495	1,238457	0,1653357	2,298232	10,64922
		2	0,5	1,0005473	0,9955289	0,9923307	0,7030935	1,340282	4,798991
			1	0,5027366	0,2488822	0,9923307	0,3515467	1,340282	4,798991
			2	0,2513683	0,06222056	0,9923307	0,1757734	1,340282	4,798991
			5	0,1005473	0,009955289	0,9923307	0,07030935	1,340274	4,799763
	1	0,5	0,5	4,628356	94,63475	2,101835	1,31625	6,250766	78,14506
			1	2,314178	23,65869	2,101835	0,6581251	6,250766	78,14506
			2	1,157089	5,914672	2,101835	0,3290626	6,250766	78,14506
			5	0,4628356	0,9463475	2,101835	0,131625	6,250766	78,14506
		1	0,5	1,227411	2,840527	1,373123	0,5753641	2,632446	13,08324
			1	0,6137056	0,7101319	1,373123	0,2876821	2,632446	13,08324
			2	0,3068528	0,177533	1,373123	0,143841	2,632446	13,08324
			5	0,1227411	0,02840527	1,373123	0,05753641	2,632446	13,08338
		2	0,5	0,4782949	0,3128768	1,169475	0,2695216	1,792959	6,769887
			1	0,2391475	0,0782192	1,169475	0,1347608	1,79296	6,769886
			2	0,1195737	0,0195548	1,169475	0,0673804	1,79296	6,769857
			5	0,04782949	0,003128768	1,169475	0,02695216	1,79296	6,697953
2	0,5	0,5	1,256711	6,533463	2,033931	0,3748533	6,032318	73,3982	
		1	0,6283556	1,633366	2,033931	0,1874266	6,032318	73,3982	
		2	0,3141779	0,4083414	2,03393	0,09371332	6,032319	73,39821	
		5	0,1256711	0,065333462	2,03393	0,03748533	6,032321	73,3982	
	1	0,5	0,4548226	0,4872682	1,534765	0,1793822	3,126352	17,62283	
		1	0,2274113	0,1218171	1,534766	0,08969108	3,12635	17,62282	
		2	0,1137057	0,03045431	1,534766	0,04484554	3,126347	17,62277	
		5	0,04548229	0,0048768	1,534768	0,01793822	3,126373	17,62427	
	2	0,5	0,1987178	0,07528558	1,380763	0,08776539	2,413688	10,65686	
		1	0,09935888	0,01882142	1,380764	0,043882142	2,413688	10,65687	
		2	0,04967949	0,004705372	1,380765	0,02194135	2,413785	10,65872	
		5	0,0198718	0,000752873	1,380778	0,008776539	2,414025	10,65738	
1	0,5	0,5	0,5	24	1855,979	1,795045	9,388802	5,570632	-14,37176
			1	12	463,9948	1,795045	4,694401	5,570632	-14,37176
			2	6	115,9987	1,795045	2,3472	5,570632	-14,37176
			5	2,4	18,55979	1,795045	0,9388802	5,570632	-14,37176
		1	0,5	4	16	1	2,772589	2	8,999632
			1	2	4	1	1,386294	2	8,999632
			2	1	1	1	0,6931472	2	8,999632
			5	0,4	0,16	1	0,2772589	2	8,999632
		2	0,5	1,311359	1,34902	0,775761	1,089527	1,088653	4,200385
			1	0,6556795	0,2587254	0,775761	0,5447635	1,088653	4,20385
			2	0,3278397	0,06468135	0,775761	0,2723818	1,88652	4,200388
			5	0,1311359	0,010,34902	0,775761	0,1089527	1,088644	4,20972
	1	0,5	0,5	8	160	1,581139	3,733495	4,869904	48,95985
			1	4	40,00001	1,581139	1,866747	4,869904	48,95985
			2	2	10	1,581139	0,9333737	4,869904	48,95985
			5	0,8	1,6	1,581139	0,3733495	4,869904	48,95985
		1	0,5	2	4	1	1,38294	2	9
			1	1	1	1	0,6931472	2	9
			2	0,5	0,25	1	0,3465736	2	9
			5	0,2	0,04	1	0,1386294	1,999984	9,000082
		2	0,5	0,7578722	0,3941412	0,8283807	0,6024198	1,253913	4,772773
			1	0,3789361	0,09853529	0,8283807	0,3012099	1,253913	4,772773
			2	0,189468	0,02463382	0,823807	0,1506049	1,253913	4,772758
			5	0,07578722	0,0039411412	0,8283807	0,06024198	1,253913	4,745648
2	0,5	0,5	3	17	1,374368	1,626521	4,023239	33,91349	
		1	1,5	4,25	1,3744368	0,8132604	4,023239	33,91349	
		2	0,7500001	1,0625	1,374368	0,4066302	4,023239	33,9135	
		5	0,3	0,17	1,374368	0,1626521	4,023239	33,9135	
	1	0,5	1	0,9999999	0,9999998	0,6931472	2	9,000002	
		1	0,5	0,25	0,9999999	0,3465736	1,999999	9	
		2	0,2500001	0,06250001	0,9999997	0,1732868	1,999999	8,999991	
		5	0,1	0,01000002	1,000001	0,06931472	2,000006	9,000417	

Parametrelerin yani  $a, b, \alpha, \beta$ 'nin durumlarına göre momentlerdeki değişimlere sırayla bakılacak olunursa;

1. sabit  $a, b, \alpha = 0.5$  ve  $\beta$ 'nin değişen durumlarına göre  $\beta$  değerleri arttıkça  $E(X)$  değeri düşmektedir.
2. sabit  $a, b, \beta = 0.5$  ve sabit  $\alpha$ 'nın değişen durumlarına göre  $\alpha$  değerleri arttıkça  $E(X)$  değeri düşmektedir.
3. sabit  $\alpha, b, \beta = 0.5$  ve  $a$ 'nın değişen durumlarına göre  $a$  değerleri arttıkça  $E(X)$  değeri yükselmektedir.
4. sabit  $a, \alpha, \beta = 0.5$  ve  $b$ 'nin değişen durumlarına göre  $b$  değerleri arttıkça  $E(X)$  değeri düşmektedir.

## 2.6. En Çok Olabilirlik Parametre Tahminleri

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$   $KwNH(a, b, \alpha, \beta)$  dağılımından alınan bir örneklem olsun. Bu durumda örnekleme ait olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad \theta = (a, b, \alpha, \beta)$$

burada  $\theta$  parametre vektörü buna göre  $\theta$  parametrelerinin tahmini  $\hat{\theta}$  olmak üzere;

$$L(\hat{\theta}; x) = \max_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

$$\ell = \log L(\hat{\theta}; x) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta)$$

olur.  $KwNH$  olasılık yoğunluk fonksiyonu için olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\hat{\theta}; x) = \prod_{i=1}^n a b \alpha \beta (1 + \beta x_i)^{\alpha-1} \left[ 1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^\alpha \right]^{b-1} (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^{\alpha-1} e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha}$$

$$= a^n b^n \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n (1 + \beta x_i)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^n [1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a]^{b-1}$$

$$\prod_{i=1}^n (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^{a-1} \prod_{i=1}^n e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha}$$

Her tarafın logaritması alınırsa;

$$\ell = n \log a + n \log b + n \log \alpha + n \log \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \beta x_i)$$

$$+ (b - 1) \sum_{i=1}^n \log [1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a] \quad (43)$$

$$+ (a - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha}) + n - \sum_{i=1}^n (1 + \beta x_i)^\alpha$$

Parametrelere göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{n}{a} - \frac{(b-1) \ln(1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha}) (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a}{1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha}) = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \log [1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a] = 0 \quad (45)$$

$$\Rightarrow b = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \log [1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a]}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 + \beta x_i) - (b - 1) \sum_{i=1}^n a(1 + \beta x_i) [(1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})]^{a-1}$$

$$\frac{e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha} \ln(1 + \beta x_i)}{1 - (1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^a} + (a - 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha} (1 + \beta x_i)^\alpha \ln(1 + \beta x_i)}{1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha}} \quad (46)$$

$$- \sum_{i=1}^n (1 + \beta x_i)^\alpha \ln(1 + \beta x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(1 + \beta x_i)} - (b - 1) \sum_{i=1}^n a(1 - e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha})^{a-1} e^{1-(1+\beta x_i)^\alpha} \quad (47)$$

şeklinde normal denklemler elde edilir. Bu normal denklemlerin analitik çözümleri oldukça zordur. Bu nedenle Newton-Raphson, L-BFGS gibi nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Ayrıca (43), (44), (45), (46), (47)'den elde edilen sonuçlar Kw-G dağılım ailesinde verilen (28), (29), (30), (31)'de verilen denklemlerle uyum sağladığı görülmektedir.

## 2.7. Sıra İstatistikleri

$KwNH$  dağılımına ait sıra istatistikleri (14) ve (15) yerine konularak elde edilir.  $KwNH$  dağılımına ait birinci sıra istatistiğinin  $oyf^{\circ}$ si

$$f_{X_1}(x) = n \left[ \left( 1 - \left( 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \right)^a \right)^b \right]^{n-1} ab\alpha\beta(1+\beta x)^{\alpha-1} \\ \left[ 1 - \left( 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \right)^a \right]^{b-1} \left( 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \right)^{a-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha}$$

$n$ . sıra istatistiğinin  $oyf^{\circ}$ si

$$f_{X_n}(x) = n \left[ 1 - \left[ 1 - \left( 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \right)^a \right]^b \right]^{n-1} ab\alpha\beta(1+\beta x)^{\alpha-1} \\ \left[ 1 - \left( 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \right)^a \right]^{b-1} \left( 1 - e^{1-(1+\beta x)^\alpha} \right)^{a-1} e^{1-(1+\beta x)^\alpha}$$

şeklinde elde edilir.

### 3. BULGULAR

Bu bölümde  $KwNH$  dağılımından üretilmiş rasgele sayılar için bir simülasyon çalışması ve gerçek veriye dayalı bir veri analizi verilir.

#### 3.1. Simülasyon

Bu kısımda parametre tahmini için elde edilen en çok olabilirlik tahmin edicilerin etkinliğini incelemek için, bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bütün hesaplamalar  $R$  paket programı kullanılarak elde edilmiştir.  $KwNH$  dağılımının farklı parametre değerleri için 20, 30, 50, 100 ve 1000 birimlik 1000'er örneklem üretilmiştir. Tahminler,  $R$  deki *optim* komutu ile  $L-BFGS-B$  metodu kullanılarak elde edilmiştir. Tablo 2., Tablo 3. ve Tablo 4.'te tahminlere ilişkin ortalama ve standart hatalar verilir.

Tablo 2., Tablo 3. ve Tablo 4.'ten, tahminlerin oldukça durağan ve gerçek değerlerine yakın olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca, örneklem birim sayısı arttıkça gerçek değerle tahmin edilen değerler farkının düştüğü görülmektedir.

**Tablo 2.** Bazı  $a, b, \alpha, \beta$  değerleri için ortalama ve standart sapma değerleri

n	Parametreler	Ortalama	Standart Sapma
1000	$a = 5$	5,025254	0,2077548
	$b = 5$	4,978118	0,4137665
	$\alpha = 5$	4,995499	0,2320956
	$\beta = 2$	2,019143	2,019143
100	$a = 5$	5,12727	0,5990779
	$b = 5$	4,998649	0,5218627
	$\alpha = 5$	5,020211	0,2776294
	$\beta = 2$	2,027852	0,239916
50	$a = 5$	5,228922	0,8730515
	$b = 5$	4,969218	0,6714138
	$\alpha = 5$	5,01202	0,3738035
	$\beta = 2$	2,064318	0,3255024
30	$a = 5$	5,443657	1,279982
	$b = 5$	5,046749	0,8252866
	$\alpha = 5$	5,081534	0,4366305
	$\beta = 2$	2,058061	0,3640558
20	$a = 5$	5,657515	1,649743
	$b = 5$	5,03643	1,00179
	$\alpha = 5$	5,112169	0,5021364
	$\beta = 2$	2,103691	0,4988495



**Tablo 3.** Bazı  $a, b, \alpha, \beta$  değerleri için ortalama ve standart sapma değerleri

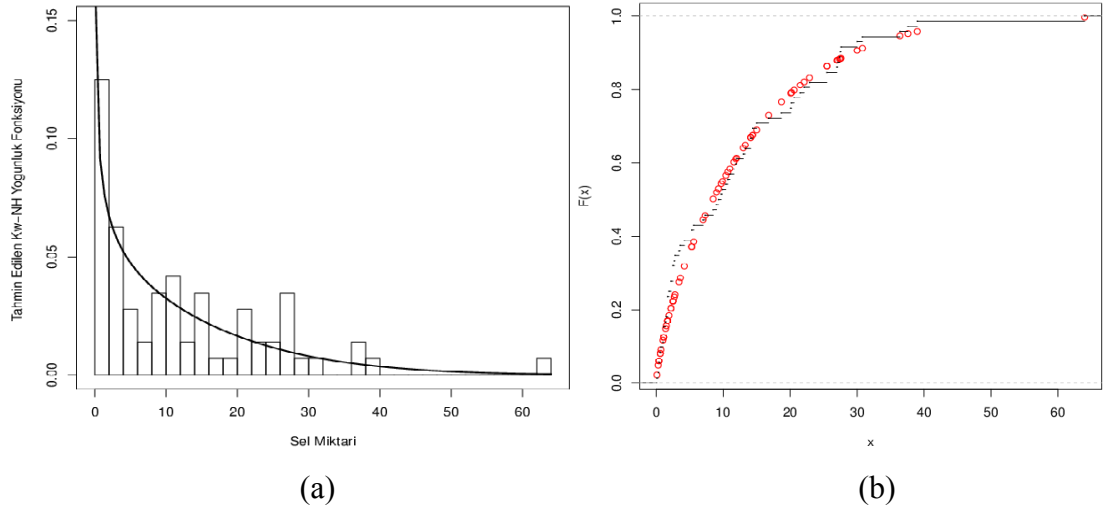
n	Parametreler	Ortalama	Standart Sapma
1000	$a = 2$	1,993852	0,09118408
	$b = 1$	0,973005	0,09483304
	$\alpha = 3$	3,07605	0,2445371
	$\beta = 0,5$	0,4968913	0,04120947
100	$a = 2$	2,090644	0,3270164
	$b = 1$	0,9671711	0,1831101
	$\alpha = 3$	2,918385	0,4735226
	$\beta = 0,5$	0,5827309	0,2280155
50	$a = 2$	2,165051	0,5118955
	$b = 1$	0,8913762	0,3275626
	$\alpha = 3$	2,939531	0,70419
	$\beta = 0,5$	0,6939125	0,3908405
30	$a = 2$	2,231725	0,6656209
	$b = 1$	0,9175032	0,3380207
	$\alpha = 3$	2,976462	0,7001637
	$\beta = 0,5$	0,6938219	0,4469113
20	$a = 2$	2,412933	0,8938499
	$b = 1$	0,9001724	0,4095498
	$\alpha = 3$	3,001373	0,7487702
	$\beta = 0,5$	0,7513851	0,7513851

**Tablo 4.** Bazı  $a, b, \alpha, \beta$  değerleri için ortalama ve standart sapma değerleri

n	Parametreler	Ortalama	Standart Sapma
1000	$a = 0,5$	0,500523	0,03209001
	$b = 0,5$	0,4995887	0,05382121
	$\alpha = 0,5$	0,5011924	0,02787155
	$\beta = 0,5$	0,5092969	0,07086163
100	$a = 0,5$	0,5148577	0,1146945
	$b = 0,5$	0,5472787	0,1821351
	$\alpha = 0,5$	0,5216685	0,1110764
	$\beta = 0,5$	0,5094583	0,2272121
50	$a = 0,5$	0,5454942	0,1757795
	$b = 0,5$	0,56809	0,2240738
	$\alpha = 0,5$	0,5383901	0,1668675
	$\beta = 0,5$	0,543519	0,2928027
30	$a = 0,5$	0,5770894	0,2523672
	$b = 0,5$	0,6261408	0,3123089
	$\alpha = 0,5$	0,5749247	0,244689
	$\beta = 0,5$	0,5736671	0,4206751
20	$a = 0,5$	0,6263355	0,3358213
	$b = 0,5$	0,6690882	0,387889
	$\alpha = 0,5$	0,6235436	0,3247782
	$\beta = 0,5$	0,6210376	0,5098903

### 3.2. Su Taşma Verisi

Bu kısımda, gerçek bir veri kümesi  $KwNH$  dağılımı ile analiz edilmiştir. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri  $R$  paket programındaki *optim* komutu ile  $L-BFGS-B$  metodu kullanılarak elde edilmiştir. Veri kümesi için, üstel ve  $NHGE$  dağılımları log-olabilirlik ve  $K-S$  değerleri baz alınarak karşılaştırılmıştır. Veri seti Kanada'da bulunan Wheaton nehrindeki 1958-1984 yılları arasında kaydedilen 72 su taşkını (sel) saniyede  $m^3$  cinsinden ifade etmektedir. Veri setinin; ortalaması 12.2, varyansı 151.221 ve çarpıklık katsayısı 1.472 değerlerine sahiptir. Dolayısıyla veri sağa çarpık bir yapıya sahiptir. Bu veri aynı zamanda, Choulakian ve Stephens (2001), Akinsete ve ark., (2008), Mahmoudi, (2011) ve Bourguignon ve ark., (2013) tarafından da analiz edilmiştir. Veriler  $X=\{1.7,2.2, 14.4, 1.1, 0.4, 20.6, 5.3, 0.7, 1.9, 13.0, 12.0, 9.3, 1.4, 18.7, 8.5, 25.5, 11.6, 14.1,22.1, 1.1, 2.5, 14.4, 1.7, 37.6, 0.6, 2.2, 39.0, 0.3, 15.0, 11.0, 7.3, 22.9, 1.7, 0.1, 1.1, 0.6, 9.0, 1.7, 7.0, 20.1, 0.4, 2.8, 14.1, 9.9, 10.4,10.7, 30.0, 3.6, 5.6, 30.8, 13.3, 4.2, 25.5, 3.4, 11.9, 21.5, 27.6, 36.4, 2.7, 64.0, 1.5, 2.5, 27.4, 1.0, 27.1, 20.2, 16.8, 5.3, 9.7, 27.5,2.5, 27.0\}$  dir. Dağılımlar için elde tahmin sonuçları ve tahminlerin standart hatası (sd) Tablo 5.' te verilir. Tablo 5.' te tahmin edilen modeller arasında en iyi modeli belirlemek için iki kriter verilir. En iyi model, en büyük log-olabilirlik ve en küçük *Kolmogorov-Smirnov* (K-S) değerine (en büyük p-değeri ile) sahip olan modeldir. Tablo-5 incelendiğinde bu kriterlere göre en iyi model  $KwNH$  modelidir ve diğer dağılım modellerine göre veriye daha iyi uyum sağlamıştır. Şekil 18.' de  $KwNH$  dağılımının tahminlerine ilişkin elde edilen modelin yoğunluk fonksiyonu (a) ile deneysel dağılıma karşı çizilen dağılım fonksiyonu grafiği (b) verilir. Şekil 18.'de  $KwNH$  dağılımının veriye uyum sağladığı görülür.



**Şekil 18.** (a)  $KwNH$  dağılımına göre modellenen sel taşkını veri kümesi grafiği (b) Deneysel dağılım ile tahmin edilen  $KwNH$  dağılım fonksiyonu grafiği.

**Tablo 5.**  $KwNH$ ,  $NH$  ve Üstel dağılım modellerinin sel taşkını veri kümesine ilişkin parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri, log-olabilirlik, K-S değerleri ve tahminlere ilişkin standart hatalar

Model	a (sd)	b (sd)	$\alpha$ (sd)	$\beta$ (sd)	$\ell$	K-S (p-değeri)
$KwNH$	0,7289 (0,1466)	1,0189 (1,0743)	1,7258 (1,4828)	0,0301 (0,0575)	-250,9189	0,1061 (0,3926)
$NH$			0,8413 (0,2594)	0,1094 (0,0596)	-251,9874	0,1244 (0,2151)
$E$				0,0819 (0,0067)	-252,1280	0,1423 (0,1083)

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Cordeiro ve de Castro (2011) tarafından önerilen Kw-G dağılım ailesinin yeni bir üyesi olan ve üstel dağılım ile  $NH$  dağılımının genel hali olan  $KwNH$  adıyla yeni bir dağılım önerilmiştir. Bu dağılımın elde edilişi üzerinde durulmuştur. Dağılımın dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu,  $r$ . momentleri, beklenen değerleri, varyansı ve en çok olabilirlik parametre tahminleri hesaplanmıştır. Ayrıca  $KwNH$  dağılımının veri modelleme etkisinin görülmesi amacıyla bir simülasyon çalışması ve bir gerçek veriye dayalı veri analizi çalışması verilmiştir.

## 5. ÖNERİLER

$KwNH$  dağılımının,  $NH$  ve üstel dağılımları ile log-olabilirlik ve K-S değerlerine göre kıyaslanarak, uygulama verisi için en iyi tahmini yaptığı sonucuna varılmıştır. Böylece  $KwNH$  dağılımının reel bir veriyi modelleyebileceği gösterilmiştir. Kw-G dağılım ailesi kullanılarak başka dağılımlar biçim yönünden zenginleştirilebilir.

## KAYNAKLAR

- Akdeniz, F., 2002.** Olasılık ve İstatistik. Baki kitap evi, ISBN 975-96039-7-7, 543s.
- Akdi, Y., 2000.** Matematiksel İstatistiğe Giriş. Gazi kitabevi, ISBN 9786055543310, 528s.
- Akinsete, A. and Lowe, C., 2009.** Beta-Rayleigh distribution in reliability measure. Proc Joint Stat Meet Phys Eng Sci Sect (ASA), 3103-3107.
- Akinsete, A., Famoye, F. and Lee, C., 2008.** The beta-Pareto distribution. Statistics, 42, 547-563.
- Alexander, C., Cordeiro, G.M., Ortega, E.M.M. and Sarabia, J.M., 2012.** Generalized beta-generated distributions. Computational Statistics and Data Analysis, 56, 1880-1897.
- Alshawarbeh, E., 2011.** Beta-Cauchy Distribution and Its Application. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Central Michigan University, Mount Pleasant, Michigan, USA. (Basımda).
- Amusan, G.E., 2010.** The Beta Maxwell Distribution. M.A. Mathematics Thesis, Department of Mathematics, Marshall University, Huntington, West Virginia, USA. (Basımda).
- Azzalini, A., 1985.** A class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian Journal of Statistics, 12, 171-178.
- Baharîth, L.A., Mousa S.A., Atallah M.A. and Elgayar, S.H., 2014.** The beta generalized inverse Weibull distribution. British Journal Mathematics Computer Science, 4, 252-270.
- Başar, E., 1993.** Yaşam Tabloları Analizinde Kullanılan Bazı İstatistiksel Tekniklerin Böbrek Nakli Verilerine Uygulanması. Doktora Tezi. Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye.
- Bourguignon, M., Silva, M.B., Zea, L.M. and Cordeiro, G.M., 2013.** The Kumaraswamy Pareto distribution. Journal of Statistical Theory Applications, 12, 129-144.
- Choulakian, V. and Stephens, M.A. (2001).** Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution. Technometrics, 43, 478-484.
- Cordeiro G.M., Castellares, F., Montenegro, L.C. and De Castro, M., 2013a.** The beta generalized gamma distribution. Statistics, 47, 888-900.
- Cordeiro, G.M. and Castro, M., 2011.** A new family of generalized distributions. Journal of Statistical Computation and Simulation, 7, 883-898

- Cordeiro, G.M. and Lemonte, A.J., 2014.** The McDonald arcsine distribution: A new model to proportional data. *Statistics*, 48, 182-199.
- Cordeiro, G.M., and Lemonte, A.J., 2012.** The McDonald inverted beta distribution. *Journal of the Franklin Institute*, 347, 1399-1429.
- Cordeiro, G.M., Cintra, R.J., Rego, L.C. and Ortega, E.M.M., 2012d.** The McDonald normal distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 8, 301-329.
- Cordeiro, G.M., Hashimoto, E.H., Ortega, E.M.M. and Pascoa, M.A.R., 2012e.** The McDonald extended distribution: Properties and applications. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 96, 409-433.
- Cordeiro, G.M., Lemonte, A.J. and Ortega, E.M.M., 2013b.** An extended fatigue life distribution. *Statistics*, 47, 626-653.
- Cordeiro, G.M., Nadarajah, S. and Ortega, E.M.M., 2012a.** The Kumaraswamy Gumbel distribution. *Statistics Methods and Applications*, 21, 139-168.
- Cordeiro, G.M., Ortega, E.M.M. and Nadarajah, S., 2010.** The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data *Journal of the Franklin Institute.*, 349, 1174-1197.
- Cordeiro, G.M., Ortega, E.M.M. and Silva, G.O., 2014b.** The Kumaraswamy modified Weibull distribution: Theory and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84, 1387-1411.
- Cordeiro, G.M., Ortega, E.M.M., Hamedani, G.G. and Gracia, D.A.,** The McDonald Burr XII model: Properties and applications. (*Basimda*).
- Cordeiro, G.M., Pescim, R.R. and Ortega, E.M.M., 2012b.** The Kumaraswamy generalized half-normal distribution for skewed positive data. *Journal of Data Science*, 10, 195-224.
- Cordeiro, G.M., Saboor, A., Khan, M.N., Özel, G. and De Pascoa, M.A.R., 2015c.** The Kumaraswamy Exponential-Weibull Distribution: Theory and Applications. *Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics (Basimda)*.
- Cordeiro, G.M., Silva, G.O. and Ortega, E.M.M., 2012c.** The beta extended Weibull distribution. *Journal of Probability and Statistical Science* 10,15-40.
- Cordeiro, G.M., Silva, G.O., Pescim, R.R. and Ortega, E.M.M., 2014a.** General properties for the beta extended half-normal distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84, 881-901.
- Correa, M.A., Nogueira, D.A. and Ferreira, E.B., 2012.** Kumaraswamy normal and Azzalini's skew normal modeling asymmetry. *Sigmae* 1, 65-83.

- De Pascoa, M.A.R., Ortega, E.M.M. And Cordeiro, G.M., 2011.** The Kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis. *Statistical Methodology*, 8, 411-433.
- De Santana, T.V.F., Ortega, E.M.M., Cordeiro, G.M. and Silva, G.O., 2012.** The Kumaraswamylog-logistic distribution. *Journal of Statistical Theory Applications*, 11, 265-291.
- Elbatal, I., 2013a.** Kumaraswamy linear exponential distribution. *Pioneer Journal of Statistical Theory Applications* 5, 59-73.
- Elbatal, I., 2013b.** Kumaraswamy generalized linear failure rate distribution. *Indian Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1, 61-78.
- Elbatal, I., 2013c.** Kumaraswamy exponentiated Pareto distribution. *Economic Quality Control*, 28, 1-8.
- Eljabri, S.S., 2013.** New Statistical Models for Extreme Values. Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering and Physical Sciences, University of Manchester, UK. (Basımda).
- El-Sherpieny, Esa. and Ahmed, M.A., 2011.** On the Kumaraswamy-Gumbel distribution. Paper presented at 46th Annual Conference Statistics Computer Sciences Operation Research, ISSR-Cairo University, Egypt, 26-29.
- Eugene, N., Lee, C. and Fayome, F., 2002.** Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31,4, 497-512.
- Gomes, A.E., Da Silva, C.Q. and Cordeiro, G.M., 2015.** Two extended Burr models: Theory and practice. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 44,8, 1706-4734.
- Gomes, A.E., Da Silva, C.Q., Cordeiro, G.M. and Ortega, E.M.M., 2014.** A new lifetime model: The Kumaraswamy generalized Rayleigh distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84, 290-309.
- Gupta, A.K., and Nadarajah, S., 2006.** Beta-Bessel distribution. *International Journal Mathematics Science*, 1-14. DOI 10.1155/IJMMS/2006/16156
- Jones, M.C., 2009.** Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, 6, 70-81
- Kazemı M.R., Haghbin, H. and Behboodian, J., 2011.** Another generalization of the skew normal distribution. *World Applied Science Journal*, 12, 1034-1039.
- Kong, L., 2004.** A Study of the Properties, Estimations and Applications for the Beta-Gamma Distribution. Ph.D. Thesis, Central Michigan University, Mount Pleasant, Michigan, USA. (Basımda).



- Kormaz, Ç.M., 2010.** Azalan Bozulma oranına Sahip Üç Parametrelili Yeni Bir Yaşam Zaman Dağılımı. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 52, 5.
- Korkmaz, Ç.M. and GENÇ, İ.A., 2015.** A New Generalized Two- Sided Class of Distributions with an Emphasis on Two- Sided Generalized Normal Distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation. DOI: 10.1080/03610918.2015.1005233
- Kozubowski, T.J. and Nadarajah, S., 2008.** The beta-Laplace distribution. Journal of Computational Analysis and Applications, 10, 305-318.
- Kumaraswamy, P., 1980.** A generalized probability density function for double-bounded random processes. Journal of Hydrology, 46, 79-88.
- Le Monte, A.J., 2013.** A new exponential-type distribution with constant, decreasing, increasing, upside-down bathtub and bathtub-shaped failure rate function. Computational Statistics and Data Analysis, 62, 149-170.
- Lemonte, A.J. and Cordeiro, G.M., 2013.** An extended Lomax distribution. Statistics, 47, 800-816.
- Lemonte, A.J., 2014.** The beta log-logistic distribution. Brazilian Journal of Probability Statistics., 28, 313-332.
- Mahmoudi, E., 2011.** The beta generalized Pareto distribution with application to lifetime data. Mathematics and Computers in Simulation, 81,11, 2414-2430.
- Mameli, V. and Musio, M., 2013.** A generalizations of the skew-normal distribution: The beta skew-normal. Communications in Statistics Theory and Methods, 42, 2229-2244.
- Mameli, V., 2012.** Two Generalizations of the Skew-Normal Distribution and Two Variantsv of McCarthy's Theorem. Ph.D. Thesis, Università Degli Studi de Cagliari, Italy. (basımda).
- Marciano, F.W.P., Nascimento, A.D.C., Santos-Neto, M. and Cordeiro, G.M., 2012.** The Mc- $\Gamma$  distribution and its properties: An application in reliability data. International Journal of Probability ans Statistics, 1, 53-71.
- Maynard, J., 2003.** A Class of Beta-Exponential Distributions: Properties, Estimation and Applications. Ph.D. Thesis, Central Michigan University, Mount Pleasant, Michigan, USA. (Basımda).
- Muthulakshmi, S. and Selvi, B.G.G., 2013.** Double sampling plan for truncated life test based on Kumaraswamy-log-logistic distribution. IOSR Journal of Mathematics 7, 29-37.

- Nadarajah, S. and Eljabri, S., 2013.** The Kumaraswamy generalized Pareto distribution. *Journal of Data Science*, 11, 739-766.
- Nadarajah, S. and Gupta, A.K., 2004.** The beta Fréchet distribution. *Far East Journal of Theoretical Statistics* 14, 15-24.
- Nadarajah, S. and Haghghi, F., 2011.** An extension of the exponential distribution. *A journal of Theoretical and Applied Statistics*, 45,6, 543-558. DOI:10.1080/02331881003678678
- Nadarajah, S. and Kotz, S., 2004.** The beta Gumbel distribution. *Mathematical Problems in Engineering* 4, 323-332.
- Oluyede, B.O. and Rajasooriya, S., 2013.** The Mc-Dagum distribution and its applications. *Asian Journal on Applied Mathematics*, Article ID ama0085.
- Öztürk, F., Aydoğdu, H., Akdi, Y. ve Karabulut, H., 2006.** Parametre Tahmini ve Hipotez Testi Bıçaklar Kitabevi, ISBN 9758695177, 274.
- Paranaíba P.F., Ortega, E.M.M., Cordeiro, G.M. and Pescim, R.R., 2011.** The beta Burr XII distribution with application to lifetime data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55, 1118-1136.
- Paranaíba, P.F., Ortega, E.M.M., Cordeiro, G.M. and Pascoa, M.A.R., 2013.** The Kumaraswamy Burr XII distribution: Theory and practice. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83, 2117-2143.
- Rajasooriya, S., 2013.** Statistical Properties of the Mc-Dagum Distribution and Related Distributions. M.S. Thesis, Georgia Southern University, Statesboro, Georgia, USA. (Basımda).
- Rinne, H., 2014.** The Hazard Rate Theory and Inference (With supplementary MATLAB-Programs). Talep üzerine baskı hariç yayımlar için Yayıncılık lisansı, 285.
- Saulo, H., Leão, J. and Bourguignon, M., 2012.** The Kumaraswamy Birnbaum-Sanders distribution. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 6, 754-759.
- Shahbaz, M.Q., Shahbaz, S. and Butt, N.S., 2012.** The Kumaraswamy inverse-Weibull distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 8, 479-489.
- Shams, T.M., 2013.** The Kumaraswamy-generalized Lomax distribution. *Middle-East Journal of Scientific Research*, 17, 641-646.
- Shittu, O.I. and Adepoju, K.A., 2013.** On the beta-Nakagami distribution. *Program in Applied Mathematics* 5, 49-58.

- Singla, N., Jan, K. and Sharma, S.K., 2012.** The beta generalized Weibull distribution: Properties and applications. Reliability Engineering and System Safety, 102, 5-15.
- Stasinopoulos, D.M. and Rigby, R.A., 2007.** Generalized additive models for location scale and shape. (GAMLSS) in Royal Journal of Statistical Software, 23, 1-46.
- Sun, J., 2011.** Statistical Properties of Convoluted Beta-Weibull Distribution. M.A. Thesis, Marshall University, USA. (Basımda).
- Tahir, H.M. and Nadarajah, S., 2015.** Parameter induction in continuous univariate distributions: Well-established G families. Annals of the Brazilian Academy of sciences, (87)2, 539-568.
- URL-1, 2010.** <http://arxiv.org/abs/1004.0911v1> (06 Ağustos 2015).
- URL-2, 2013.** <http://arxiv.org/pdf/1309.2961v1.pdf> (08 Ağustos 2015).
- URL-3, 2015.** [https://tr.wikipedia.org/wiki/Normal\\_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m](https://tr.wikipedia.org/wiki/Normal_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m) (06 Ağustos 2015).
- URL-4, 2015.** [https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution) (18 Ağustos 2015).
- URL-5, 2015.** [https://tr.wikipedia.org/wiki/Gamma\\_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m%C4%B1](https://tr.wikipedia.org/wiki/Gamma_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m%C4%B1) (27 Ağustos 2015).
- URL-6, 2015.** [https://tr.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cstel\\_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m](https://tr.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cstel_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m) (6 Eylül 2015).
- URL-7, 2015.** [https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse\\_Gaussian\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_Gaussian_distribution) (13 Eylül 2015).
- URL-8, 2015.** [https://en.wikipedia.org/wiki/Kumaraswamy\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Kumaraswamy_distribution) (26 Eylül 2015).
- Yang, T., 2012.** Statistical Properties of Kumaraswamy Generalized Inverse Weibull Distribution. M.Sc. Thesis, Georgia Southern University, USA. (Unpublished).
- Zubair M., 2013.** Properties and Extensions of Fisk Income Size Distribution. M.Phil. Thesis, Department of Statistics, The Islamia University of Bahawalpur, Pakistan. (Basımda).
- Zubair, M., 2013.** Properties and Extensions of Fisk Income Size Distribution. M.Phil. Thesis, Department of Statistics, The Islamia University of Bahawalpur, Pakistan. (Basımda).

## EKLER

**EK-1. ( Tablo 1.'in tamamı )**

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$	E(X)	V	CV	Medyan	Çarpıklık	Baskılık
0,5	0,5	0,5	0,5	17,5386	1418,2550	2,1472	4,6735	6,3543	80,8733
			1	8,7693	354,5638	2,1473	2,3368	6,3543	80,8732
			2	4,384642	88,64096	2,147253	1,168377	6,35429	80,87328
			5	1,753857	14,18255	2,147253	0,4673509	6,35429	80,87328
		1	0,5	3,014198	13,93495	1,238457	1,653357	2,298232	10,64922
			1	1,507099	3,483738	1,238457	0,8266786	2,298232	10,64922
			2	0,7535495	0,8709344	1,238457	0,4133393	2,298232	10,64922
			5	0,3014198	0,1393495	1,238457	0,1653357	2,298232	10,64922
		2	0,5	1,0005473	0,9955289	0,9923307	0,7030935	1,340282	4,798991
			1	0,5027366	0,2488822	0,9923307	0,3515467	1,340282	4,798991
			2	0,2513683	0,06222056	0,9923307	0,1757734	1,340282	4,798991
			5	0,1005473	0,009955289	0,9923307	0,07030935	1,340274	4,799763
	1	0,5	0,5	4,628356	94,63475	2,101835	1,31625	6,250766	78,14506
			1	2,314178	23,65869	2,101835	0,6581251	6,250766	78,14506
			2	1,157089	5,914672	2,101835	0,3290626	6,250766	78,14506
			5	0,4628356	0,9463475	2,101835	0,131625	6,250766	78,14506
		1	0,5	1,227411	2,840527	1,373123	0,5753641	2,632446	13,08324
			1	0,6137056	0,7101319	1,373123	0,2876821	2,632446	13,08324
			2	0,3068528	0,177533	1,373123	0,143841	2,632446	13,08324
			5	0,1227411	0,02840527	1,373123	0,05753641	2,632446	13,08338
		2	0,5	0,4782949	0,3128768	1,169475	0,2695216	1,792959	6,769887
			1	0,2391475	0,0782192	1,169475	0,1347608	1,79296	6,769886
			2	0,1195737	0,0195548	1,169475	0,0673804	1,79296	6,769857
			5	0,04782949	0,003128768	1,169475	0,02695216	1,79296	6,697953
2	0,5	0,5	1,256711	6,533463	2,033931	0,3748533	6,032318	73,3982	
		1	0,6283556	1,633366	2,033931	0,1874266	6,032318	73,3982	
		2	0,3141779	0,4083414	2,03393	0,09371332	6,032319	73,39821	
		5	0,1256711	0,065333462	2,03393	0,03748533	6,032321	73,3982	
	1	0,5	0,4548226	0,4872682	1,534765	0,1793822	3,126352	17,62283	
		1	0,2274113	0,1218171	1,534766	0,08969108	3,12635	17,62282	
		2	0,1137057	0,03045431	1,534766	0,04484554	3,126347	17,62277	
		5	0,04548229	0,0048768	1,534768	0,01793822	3,126373	17,62427	
	2	0,5	0,1987178	0,07528558	1,380763	0,08776539	2,413688	10,65686	
		1	0,09935888	0,01882142	1,380764	0,04388214	2,413688	10,65687	
		2	0,04967949	0,004705372	1,380765	0,02194135	2,413785	10,65872	
		5	0,0198718	0,000752873	1,380778	0,00877653	2,414025	10,65738	
1	0,5	0,5	0,5	24	1855,979	1,795045	9,388802	5,570632	-14,37176
			1	12	463,9948	1,795045	4,694401	5,570632	-14,37176
			2	6	115,9987	1,795045	2,3472	5,570632	-14,37176
			5	2,4	18,55979	1,795045	0,9388802	5,570632	-14,37176
		1	0,5	4	16	1	2,772589	2	8,999632
			1	2	4	1	1,386294	2	8,999632
			2	1	1	1	0,6931472	2	8,999632
			5	0,4	0,16	1	0,2772589	2	8,999632
		2	0,5	1,311359	1,34902	0,775761	1,089527	1,088653	4,200385
			1	0,6556795	0,2587254	0,775761	0,5447635	1,088653	4,20385
			2	0,3278397	0,06468135	0,775761	0,2723818	1,88652	4,200388
			5	0,1311359	0,010,34902	0,775761	0,1089527	1,088644	4,20972
	1	0,5	0,5	8	160	1,581139	3,733495	4,869904	48,95985
			1	4	40,00001	1,581139	1,866747	4,869904	48,95985
			2	2	10	1,581139	0,9333737	4,869904	48,95985
			5	0,8	1,6	1,581139	0,3733495	4,869904	48,95985
		1	0,5	2	4	1	1,38294	2	9
			1	1	1	1	0,6931472	2	9
			2	0,5	0,25	1	0,3465736	2	9
			5	0,2	0,04	1	0,1386294	1,999984	9,000082
		2	0,5	0,7578722	0,3941412	0,8283807	0,6024198	1,253913	4,772773
			1	0,3789361	0,09853529	0,8283807	0,3012099	1,253913	4,772773
			2	0,189468	0,02463382	0,823807	0,1506049	1,253913	4,772758
			5	0,07578722	0,0039411412	0,8283807	0,06024198	1,253913	4,745648

Ek-1. (Tablo 1.'in devamı)

2	0,5	0,5	3	17	1,374368	1,626521	4,023239	33,91349	
		1	1,5	4,25	1,3744368	0,8132604	4,023239	33,91349	
		2	0,7500001	1,0625	1,374368	0,4066302	4,023239	33,9135	
		5	0,3	0,17	1,374368	0,1626521	4,023239	33,9135	
		1	0,5	1	0,9999999	0,9999998	0,6931472	2	9,000002
		1	0,5	0,25	0,25	0,9999999	0,3465736	1,999999	9
	1	2	0,2500001	0,06250001	0,9999997	0,1732868	1,999999	8,999991	
		5	0,1	0,01000002	1,000001	0,06931472	2,000006	9,000417	
		2	0,5	0,4213693	0,136971	0,8783174	0,3208392	1,431719	5,519629
			1	0,2106847	0,03424274	0,8783168	0,1604196	1,431722	5,519633
			2	0,1053424	0,008560708	0,878318	0,08020979	1,43176	5,520175
			5	0,04213695	0,001369728	0,8783225	0,03208392	1,431858	5,521431
2	0,5	0,5	32,24927	2376,867	1,511759	16,12147	4,956026	-15,93007	
		1	16,12464	594,2167	1,511759	8,060733	4,956026	-15,93007	
		2	8,062318	148,5542	1,511759	4,030366	4,956026	-15,93007	
		5	3,224927	23,76867	1,511759	1,612147	4,956026	-15,93007	
		1	0,5	5,141594	17,49617	0,8135303	4,02021	1,80479	8,072433
			1	2,570797	4,374043	0,8135303	2,010105	1,80479	8,072433
	2		1,285399	1,093511	0,8135303	1,005053	1,80479	8,072433	
	5		0,5141594	0,1749617	0,8135303	0,402021	1,80479	8,072433	
	2	0,5	1,644478	1,000965	0,608389	1,469931	0,9453885	3,996977	
		1	0,8222392	0,2502413	0,608389	0,7349654	0,9453885	3,996977	
		2	0,4111196	0,06256033	0,608389	0,3674827	0,9453879	3,99698	
		5	0,1644478	0,01000965	0,608389	0,1469931	0,9453763	3,997507	
2	0,5	0,5	13,00001	252,9998	1,223535	7,927497	3,948602	33,48036	
		1	6,500003	63,24996	1,223535	3,963749	3,948602	33,48036	
		2	3,250002	15,81249	1,223535	1,981874	3,948602	33,48036	
		5	1,300001	2,529998	1,223535	0,7927497	3,948602	33,48036	
		1	0,5	3,00003	4,99998	0,7453536	2,455894	1,609982	7,080037
			1	1,500002	1,249995	0,7453536	1,227947	1,609982	7,080037
	2		0,7500008	0,3124987	0,7453536	0,6139736	1,609982	7,080037	
	5		0,3000003	0,0499998	0,7453536	0,2455894	1,609973	7,080095	
	2	0,5	1,094377	0,4248391	0,5955873	0,9852619	0,9294217	4,007159	
		1	0,5471884	0,1062098	0,5955873	0,492631	0,9294217	4,007148	
		2	0,2735942	0,02655245	0,5955873	0,2463155	0,9294217	4,007148	
		5	0,1094377	0,004248391	0,5955873	0,09852619	0,9294217	3,981842	
2	0,5	0,5	6,13889	37,00385	0,9909087	4,330624	2,932541	19,37873	
		1	3,069445	9,250962	0,9909087	2,165312	2,932541	19,37873	
		2	1,534722	2,312741	0,9909087	1,082656	2,932541	19,37873	
		5	0,6138891	0,3700383	0,9909082	0,4330624	2,932544	19,37873	
		1	0,5	1,833334	1,583333	0,6863484	1,558265	1,389598	5,986152
			1	0,9166669	0,395833	0,6863482	0,7791324	1,389599	5,986155
	2		0,4583335	0,09895824	0,686348	0,3895662	1,389599	5,986153	
	5		0,1833335	0,01583332	0,6863479	0,1558265	1,389606	5,986173	
	2	0,5	0,7356397	0,1829428	0,5814233	0,6676824	0,8871576	3,908498	
		1	0,3678199	0,0457357	0,5814233	0,3338412	0,8871597	3,908492	
		2	0,18391	0,01143392	0,5814231	0,1669206	0,8871906	3,908392	
		5	0,07356408	0,001829431	0,5814229	0,06676824	0,8872673	3,909402	

## ÖZGEÇMİŞ

Orhan Mazlum YAZAR 23/02/1987 tarihinde Bingöl'de doğdu. İlköğretimini 2001 yılında Samsun ilinde Kazım Orbay İlköğretim Okulunda, Orta öğretimini 2004 yılında Samsun ilinde Yüzüncü Yıl Lisesi'nde tamamladı. 2005 tarihinde başladığı lisans eğitimini 30/06/2010 tarihinde Yüzüncü yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2011 Yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifikasını aldı. 2013 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde başladığı Tezli yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir. Artvin Çoruh Üniversitesi Kurumunda Memur olarak 07/08/2010 tarihi itibari ile görev yapmaktadır.