T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR SINIF PARABOLİK DENKLEM İÇİN KARIŞIK PROBLEMİN FOURİER YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Tamer KÖZLEME

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE 2014

T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR SINIF PARABOLİK DENKLEM İÇİN KARIŞIK PROBLEMİN FOURİER YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu çalışma, 07 / 07 / 2014 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı, Soyadı	**İmzası**
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV	
Jüri Üyesi	:	Doç. Dr. Kadir KUTLU	K. Kut
Jüri Üyesi	:	Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER	BÖGüler

Prof. Dr. Selami ŞAŞMAZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışmam sırasında, engin bilgi ve tecrübelerinden azami derecede istifade etmemi sağlayan Sayın Prof. Dr. Hüseyin HALİLOV'a, karamsarlığa düştüğüm süreçlerde hep yanımda olan ailem ve sevdiklerime, eğitim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tamer KÖZLEME
RİZE 2014

ÖZET

Bir Sınıf Parabolik Denklem İçin Karışık Problemin Fourier Yöntemi İle Çözümü

Çok sayıda gerek Matematik, gerekse teknolojik problemlerin incelenmesi parabolik denklemlerle ($u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x)$) ilgilidir. Bu yüzden sözkonusu denklem için çeşitli problemler (başlangıç değer, sınır değer, karışık problem vs.) bilim adamlarınca farklı yöntemlerle incelenmiş ve incelenmektedir.

Ele alınan tez çalışmasında ilk defa Euler tipi parabolik denklem diye adlandıracağımız denklem için

$$u_t = a^2(x^2 u_{xx} + x u_x) + f(t,x), \qquad (0 < t < T,\ 1 < x < e^\pi) \quad (0.1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad (1 \le x \le e^\pi) \quad (0.2)$$

$$u(t,1) = u(t,e^\pi) = 0 \qquad (0 \le t < T) \quad (0.3)$$

karışık probleminin çözümünün varlığı ve tekliği Fourier, başka bir deyişle değişkenlerine ayırma yöntemi ile incelenmiştir. Burada $u(t,x)$ bilinmeyen fonksiyon, $\varphi(x)$ ve $f(t,x)$ ise belli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır ($0 \le t < T < \infty,\ \ 1 \le x \le e^\pi$). Tez üç bölümden oluşmaktadır.

1. Bölüm tez yazımında başvurulan bilgiler,
2. Bölüm Euler tipi türdeş parabolik denklem için karışık problemin çözümü,
3. Bölüm Euler tipi türdeş olmayan parabolik denklem için karışık problemin çözümü.

Anahtar Kelimeler : Dirichlet Problemi, Euler Tipi Parabolik Denklem, Fourier Yöntemi, Kaynak Fonksiyonu.

SUMMARY

Solution of Mixed Problem For A Class of Parabolic Equation by Fourier Method

The analysis of most problems, either Mathematical or technological, are related to parabolic equations $u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x)$. This is why various problems about these equations (initial value, boundary value, mixed problems etc.) have been examined and are being examined with different methods by scientists.

In this current thesis we study, the uniqueness and the existence of the solution of the mixed problem for the equation called Euler type parabolic equation

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(x^2 u_{xx} + x u_x) + f(t,x), && (0 < t < T,\ 1 < x < e^{\pi}), \\ u(0,x) &= \varphi(x) && (1 \le x \le e^{\pi}) \\ u(t,1) &= u(t,e^{\pi}) = 0 && (0 \le t < T) \end{aligned}$$

has been examined with Fourier method, in other words the method of seperation of variables. Here $U(t,x)$ is the unknown function, $\varphi(x)$ and $f(t,x)$ are known functions with specific properties $(0 \le t < T < \infty,\ \ 1 \le x \le e^{\pi})$.

The thesis consists of three parts.

Part 1. Preliminaries used in the thesis,
Part 2. Solution of the mixed problem for Euler type homogeneous parabolic equations,
Part 3. Solution of the mixed problem for Euler type nonhomogeneous parabolic equations.

Keywords: Dirichler Problem, Euler Type Parabolic Equation, Fourier Method, Kernel Function.

İÇİNDEKİLER **Sayfa No:**

ÖNSÖZ……………………………………………………………………..…….I
ÖZET ……………………………………………………………………………II
SUMMARY…………………………………………………………………….III
İÇİNDEKİLER…………………………………………………………………IV
SİMGELER ve KISALTMALAR………………………………………………V
1. GENEL BİLGİLER……………………………………………………………1
1.1 $L^2[a,b]$ Uzayı……………………………………………………………….1
1.2 Fonksiyon Serileri……………………………………………………………...5
1.3 Parametreye bağlı integraller………………………………………………..9
1.4 Fourier Serileri……………………………………………………………..11
1.5 Euler Denklemi…………………………………………………………….19
1.6 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler……………………………………20
1.7 Sınır Değer Problemleri…………………………………………………....21
1.8 Sturm-Liouville Problemleri……………………………………………….22
1.9 Fourier Yöntemi……………………………………………………………23
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR…………………………………………………..28
3. BULGULAR …………………………………………………………………29
3.1 Euler Tipi Türdeş Parabolik Denklem İçin Karışık Problemin Çözümü…………...29
3.2 Euler Tipi Türdeş Olmayan Parabolik Denklem İçin Karışık Problemin Çözümü…35
4. TARTIŞMA ve SONUÇ……………………………………………………...40
5. ÖNERİLER …………………………………………………………………..41
6. KAYNAKLAR………………………………………………………………..42
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$L^2[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında karesi integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$P[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar kümesi
$C(D)$	:	D bölgesindeki sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^1[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında birinci türevi sürekli olan fonksiyonlar kümesi
(f,g)	:	$[a,b]$ aralığında iki fonksiyonun iç çarpımı
δ^2	:	Ortalama karesel sapma
$G(t,\xi,x)$	:	Kaynak fonksiyonu
$U_k^T(t)$	:	Türdeş kısmın çözümü
$\bigcirc$	:	Çözüm burada başlıyor
$\oslash$	:	Çözüm burada bitiyor

1. GENEL BİLGİLER

1.1. $L^2[a,b]$ Uzayı

Tanım 1.1. $f : [a,b] \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx$ integrali mevcut ise f ye $[a,b]$ aralığında *karesi integrallenebilir fonksiyon* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009). $[a,b]$ aralığında karesi integrallenebilen fonksiyonlar kümesi $L^2[a,b]$ ile gösterilir (Soykan, 2008).

Teorem 1.2. $L^2[a,b]$ kümesi aşağıda tanımlı toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri ile bir vektör uzayıdır.
$\forall x \in [a,b]$, $\forall f, g \in L^2[a,b]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x)g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Ayrıca bu uzayda

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

bir iççarpım tanımlar. Bu iç çarpıma $L^2[a,b]$ uzayının *standart iççarpımı* denir. Bu iççarpım ile $L^2[a,b]$ bir iççarpım uzayıdır. Bu uzayda iççarpım yardımıyla $f \in L^2[a,b]$ olmak üzere

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} \tag{1.1}$$

normu tanımlanabilir. Bu norm ile $L^2[a,b]$ uzayı bir *normlu iççarpım uzayı* olur (Soykan, 2008).

Tanım 1.3 (Ortogonal Küme). $\{f_n\} \subset L^2[a,b]$ bir fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\int_a^b f_i(x)f_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ ||f_i||^2, & i = j \end{cases} \tag{1.2}$$

eşitliği sağlandığında bu diziye $[a,b]$ de *ortogonal fonksiyonlar dizisi* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

$r(x)$, $[a,b]$ aralığında negatif olmayan ve integrallenebilen fonksiyon olmak üzere
eğer $i \neq j$ için

$$\int_a^b f_i(x)f_j(x)r(x)dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $[a,b]$ aralığında $r(x)$ *ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal fonksiyonlar dizisi* denir (Vretblad, 2003).
r-ağırlıklı norm ise, $f \in L^2[a,b]$ olmak üzere

$$||f||_r = \left(\int_a^b f^2(x)r(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile verilir.

Örnek 1.4. Aşağıda verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının verilen aralıkta iççarpımını ve normlarını bulup,verilmişse r ağırlıklı, ortogonal olup olmadıklarını belirleyiniz.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = x+1, \qquad [0,1]$
2. $f(x) = \sin nx, \quad g(x) = \cos nx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad [-\pi,\pi]$
3. $f(x) = \sin(2n\ln x), \quad g(x) = 1, \quad r(x) = \dfrac{1}{x}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad [1,e^\pi]$

○ 1.

$$(f,g) = \int_0^1 x(x+1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{5}{6}$$

$(f,g) \neq 0$ olduğundan, ele alınan fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ortogonal değildir.

$$||f||^2 = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}, \qquad ||f|| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$||g||^2 = \int_0^1 (x+1)^2dx = \frac{(x+1)^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{7}{3}, \qquad ||g|| = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

2. $[-\pi,\pi]$ aralığında $\sin nx$ tek, $\cos nx$ çift fonksiyon olduğundan çarpımları tek fonksiyondur. Tek fonksiyonun simetrik aralıktaki integrali sıfıra eşit olduğundan

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx = 0$$

yazılabilir. Yani $\sin nx$ ve $\cos nx$ fonksiyonları $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $[-\pi, \pi]$ aralığında ortogonaldir.

$$||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2nx)dx = \pi, \qquad ||f|| = \sqrt{\pi}$$
$$||g||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \pi, \qquad ||g|| = \sqrt{\pi}$$

3.

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_1^{e^\pi} 1\sin(2n\ln x)\frac{1}{x}dx = \int_1^{e^\pi} \sin(2n\ln x)d\ln x \\ &= -\frac{1}{2n}\cos(2n\ln x)\Big|_1^{e^\pi} = -\frac{1}{2n}\big((-1)^{2n}-1\big) = 0\end{aligned}$$

olduğundan ele alınan fonksiyonlar $[1, e^\pi]$ aralığında $\frac{1}{x}$ ağırlıklı ortogonal fonksiyonlardır. Şimdi $\frac{1}{x}$ ağırlıklı normlarını bulalım.

$$\begin{aligned}||f||^2 &= \int_1^{e^\pi} \sin^2(2n\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^\pi}(1-\cos(4n\ln x))\,d\ln x \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln x - \frac{1}{4n}\sin(4n\ln x)\big)\Big|_1^{e^\pi} = \frac{\pi}{2}, \quad ||f|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ ||g||^2 &= \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^{e^\pi} = \pi, \qquad ||g|| = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\oslash$

Örnek 1.5.

$$\sin x, \sin 2x, \ldots \sin nx, \ldots$$

fonksiyonlar sisteminin $[0, \pi]$ de ortogonal olduğunu gösteriniz.

○ $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $n \neq k$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\sin nx, \sin kx) &= \int_0^{\pi} \sin nx \sin kx dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos(n+k)x - \cos(n-k)x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+k}\sin(n+k)x - \frac{1}{n-k}\sin(n-k)x\right]\Big|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

$n = k$ için

$$\begin{aligned}(\sin nx, \sin nx) &= \int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(1-\cos 2nx\big)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

elde edilir ki bu, sözü edilen fonksiyonlar sisteminin ortogonal olduğunu gösterir. $\oslash$

Tanım 1.6. $\{f_n\} \subset L^2[a,b]$ fonksiyonlar sistemi için

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{1.3}$$

eşitliği sağlandığında ona $[a,b]$ de *ortonormal fonksiyonlar sistemi* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Vretblad, 2003).

Örnek 1.7. Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıklarda L^2 ye dahil olup olmadıklarını araştırıp, sözü edilen uzayda olanların L^2 de normlarını bulunuz.

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad 0 < x < 1$

3. $f(x) = \frac{1}{x}, \qquad 1 < x < \infty$

4. $f(x) = \sin \ln x, \qquad [1, e^\pi], \qquad r(x) = \frac{1}{x}$

○ 1. $\quad ||f||^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} 1^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0^2 dx = \frac{1}{2}, \quad$ yani $f \in L^2(0,1)$ ve
$||f|| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

2.

$$||f||^2 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = \infty,$$

yani $f \notin L^2(0,1)$.

3.

$$||f||^2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\lim_{b \to \infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b = -\lim_{b \to \infty} (\frac{1}{b} - 1) = 1,$$

O halde $||f|| = 1$ olup $f \in L^2(1, \infty)$ olur.

4.

$$\begin{aligned} ||f||_r^2 &= \int_1^{e^\pi} \sin^2 \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{e^\pi} (1 - \cos 2 \ln x) d \ln x \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \sin 2 \ln x \right) \Big|_1^{e^\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

yani $||f||_r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ olup $f \in L^2[1, e^\pi]$. $\quad \oslash$

Örnek 1.8. $[1, e^{\pi}]$ kapalı aralığında

$$\sin\ln x, \sin 2\ln x, \ldots, \sin n\ln x, \ldots \qquad (n = \overline{1,\infty})$$

fonksiyonlar sisteminin $\dfrac{1}{x}$ ağırlıklı ortogonal sistem olduğunu gösteriniz.

○

$$\int_1^{e^{\pi}} \sin(n\ln x)\sin(k\ln x)\frac{1}{x}dx$$

integralini hesaplamak için $\ln x = u$ değişken değişimi yapılırsa, $\dfrac{1}{x}dx = du$ ve $x = 1$ de $u = 0$, $x = e^{\pi}$ de $u = \pi$ olur. Bu nedenle

$$\int_1^{e^{\pi}} \sin(n\ln x)\sin(k\ln x)\frac{1}{x}dx = \int_0^{\pi} \sin(ku)\sin(nu)\,du$$

sonucuna varılır. $\sin nu$,$(n = \overline{1,\infty})$ fonksiyonlar sistemi $[0,\pi]$ de ortogonal olduğundan (Örnek 1.5), ele alınan sistem $[1, e^{\pi}]$ aralığında $\dfrac{1}{x}$ ağırlıklı ortogonal sistem olur. ⊘

1.2. Fonksiyon Serileri

Terimleri, herhangi bir bölgede tanımlı fonksiyonlardan oluşan seriye *fonksiyon serisi* denir ve

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots \qquad \text{veya} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.4}$$

şeklinde yazılır.(1.4) serisinin $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ terimlerinin, ortak tanım bölgesi D olsun. Açıktır ki x yerine belli bir $x_0 \in D$ değeri yazıldığında, fonksiyon serisi, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ sayı serisine dönüşür. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ sayı serisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisine x_0 *noktasında yakınsak seri*, x_0 noktasına ise *yakınsaklık noktası* denir. Örneğin, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ fonksiyon serisinin terimleri $D = (-\infty, \infty)$ aralığında tanımlıdır ve $x_0 = 0$ noktasında, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ yakınsak serisine dönüşür. Yani, $x_0 = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ serisinin yakınsaklık noktasıdır.

Fonksiyon serisi, herhangi $X \subset D$ kümesinin tüm x noktalarında yakınsaksa, ona X *kümesinde yakınsak seri* denir.

Fonksiyon serisi, tüm $x \in X$ noktalarında yakınsak, $x \notin X$ noktalarında ise ıraksaksa, X kümesine (aralığına), *fonksiyon serisinin yakınsaklık kümesi (aralığı)* denir.
Örneğin, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ fonksiyon serisi, $|x| < 1$ koşulunu sağlayan tüm x ler için sonsuz azalan geometrik dizinin toplamı olduğundan, yakınsak, $|x| \geq 1$ koşulunu sağlayan tüm x ler içinse ıraksaktır. Yani sözü edilen serinin yakınsaklık kümesi, $(-1, 1)$ aralığıdır.

Fonksiyon serisinin yakınsaklık bölgesi boş küme de olabilir. Örneğin, $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x^2)^n$ serisinin yakınsaklık bölgesi $\varnothing$ dir.

Fonksiyon serisinin yakınsaklığı, onun kısmi toplamlar dizisinin yardımıyla da tanımlanabilir.
(1.4) serisinin n. kısmi toplamını

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

ile gösterirsek $\{s_n(x)\}$ fonksiyon dizisine (1.4) fonksiyon serisinin *kısmi toplamlar dizisi* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Tanım 1.9. Herhangi bir X kümesinde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin $\{s_n(x)\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisine, X *kümesinde yakınsak seri*, kısmi toplamların

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x), \qquad x \in X$$

limitine de, *serinin toplamı* denir ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x), \quad (x \in X)$ şeklinde yazılır.

Bilindiği gibi, seri açılımı şeklinde verilen her fonksiyonun yaklaşık ifadesi olarak, ele alınan serinin n. kısmi toplamı alınabilir. Bu yaklaşık ifade, n ye bağlı olarak istenen kesinlikte bulunabilir ve yapılan hatanın değerlendirilmesi de $|f(x) - s_n(x)|$ için yapılır (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009). Bu tür farkların değerlendirilme şekline bağlı olarak, aşağıdaki kavramları verelim.

Tanım 1.10. $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ ifadesine, $[a, b]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonunun, $f(x)$ ten *sapması* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Tanım 1.11 (Ortalama Karesel Sapma). $\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-g(x)]^2dx$ ifadesine, $[a,b]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonunun, $f(x)$ ten *ortalama karesel sapması* denir ve δ^2 ile gösterilir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009);

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-g(x)]^2dx.$$

Tanım 1.12. $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı, $n > n_0(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan tüm $n \in \mathbb{N}$ ler ve tüm $x \in X$ ler için

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon \tag{1.5}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa, (1.4) serisine X kümesinde *düzgün yakınsak seri*, $s(x)$ e de serinin toplamı denir (Can, 2004; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Myint and Debnath, 2007; Strauss, 2008).

Düzgün yakınsaklığın tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir.
Terimleri $[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyon serisi

$$\max_{x\in[a,b]}\left|s(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \to 0, \qquad (N \to \infty)$$

şartını sağlıyorsa, sözü edilen seri $[a,b]$ aralığında $f(x)$ *e düzgün yakınsaktır* denir (Strauss, 2008).

Tanım 1.13. Terimleri $L^2[a,b]$ de tanımlı olan fonksiyon serisi için $N \to \infty$ da

$$\int_a^b \left|s(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right|^2 dx \to 0$$

koşulu sağlanıyorsa sözü edilen seri, $f(x)$ e *ortalama karesel sapma anlamında yakınsak* denir (Myint and Debnath, 2007; Strauss, 2008).

Burada düzgün yakınsaklığın, noktasal yakınsaklıktan ve ortalama karesel sapma anlamında yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu söyleyebiliriz. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 1.14. Terimleri $(0,1)$ aralığında tanımlı $\{f_n(x)\} = \{(1-x)x^{n-1}\}$ fonksiyon dizisini ele alalım.

$$\sum_{n=1}^{N}(1-x)x^{n-1} = 1 - x^N \to 1, \quad N \to \infty, \quad (0 < x < 1 \quad \text{olduğundan})$$

Bu durumda $f_n(x)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında 1 e noktasal yakınsaktır. Üstelik

$$\int_0^1 \left|1-(1-x^N)\right|^2 dx = \int_0^1 x^{2N} dx = \frac{1}{2N+1} \to 0, \quad (N \to \infty)$$

olduğundan ortalama karesel sapma anlamında yakınsaktır. Fakat

$$\sup_{x\in(0,1)} \left|1-(1-x^N)\right| = \sup_{x\in(0,1)} \left|x^N\right| = 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

olduğundan $f_n(x)$, $(0,1)$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

Tanım 1.15. Herhangibir X kümesinde (1.4) serisinin terimleri için,

$$|f_n(x)| \leq a_n, \qquad n=1,2,\dots \tag{1.6}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif terimli yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sayı serisi varsa, (1.4) serisine X kümesinde *sınırlanan seri*, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine de onun *sınırlayanı* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.16 (Weierstrass Ölçütü). Herhangi bir kümede sınırlanan seri, o kümede mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Sonlu sayıda düzgün yakınsak serinin toplamının da düzgün yakınsak olduğunu ve bir düzgün yakınsak serinin tüm terimlerini aynı bir sınırlı fonksiyonla veya sabitle çarptığımızda düzgün yakınsaklık bozulmaz (Can, 2004).

Teorem 1.17 (Süreklilik). Terimleri, herhangi bir X kümesinde sürekli fonksiyonlardan oluşan (1.4) serisi bu kümede düzgün yakınsak ise,

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \dots \tag{1.7}$$

toplamı da X kümesinde sürekli fonksiyondur (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.18 (Terim Terim İntegralleme). Terimleri herhangi bir $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardan oluşan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi, bu aralıkta $s(x)$ e düzgün yakınsarsa o zaman

$$\int_a^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x f_n(t) dt\right] \tag{1.8}$$

eşitliği doğrudur. Yani düzgün yakınsak seri, yakınsaklık aralığında terim terim integrallenebilirdir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.19 (Terim Terim Türetme). Terimleri, $[a,b]$ aralığında sürekli türeve sahip $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi, bu aralıkta yakınsak, terimlerinin türevlerinden elde edilen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisi de düzgün yakınsak ise, o zaman $s(x)$, $[a,b]$ de türetilebilirdir ve

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \tag{1.9}$$

eşitliği doğrudur (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

1.3. Parametreye Bağlı İntegraller

Tanım 1.20. $u = f(t,x)$ fonksiyonu $[a,b] \times [c,d] = D$ dikdörtgensel bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\int_c^d f(t,x)dx$ integraline t *parametresine bağlı integral* denir ve

$$\phi(t) = \int_c^d f(t,x)dx \tag{1.10}$$

ile gösterilir (Can, 2004).

Teorem 1.21 (Süreklilik). $f(t,x)$, $[a,b] \times [c,d] = D$ dikdörtgensel bölgesinde her iki değişkenine göre sürekli bir fonksiyon ise $\phi(t)$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında t ye göre süreklidir.

$\phi(t), t_0 \in [a,b]$ de sürekli ise

$$\lim_{t \to t_0} \phi(t) = \phi(t_0) = \int_c^d f(t_0,x)dx$$

olur. Böylece $f(t,x)$ sürekli olduğunda

$$\lim_{t \to t_0} \int_c^d f(t,x)dx = \int_c^d \lim_{t \to t_0} f(t,x)dx$$

bulunur ki bu, limit ile integralin sırasının değiştirilebildiğini söyler (Can, 2004).

Örnek 1.22.

$$\lim_{t \to 0} \int_1^{e^\pi} \frac{e^{tx}}{x} \sin \ln x dx$$

limitini hesaplayınız.

○ $0 < \delta < 1$ olmak üzere $f(t,x) = \dfrac{e^{tx}}{x} \sin \ln x$ fonksiyonu $[1-\delta, 1+\delta] \times [1-\delta, 1+\delta]$ bölgesinde sürekli olduğundan integral ile limitin sırası değiştirilebilir. Böylece,

$$\lim_{t \to 0} \int_1^{e^\pi} \frac{e^{tx}}{x} \sin \ln x dx = \int_1^{e^\pi} \lim_{t \to 0} \frac{e^{tx}}{x} \sin \ln x dx$$

yazılabilir.

$$\lim_{t\to 0} e^{tx} = e^0 = 1$$

ve

$$\int_1^{e^\pi} \frac{1}{x}\sin\ln x dx = \int_1^{e^\pi} \sin\ln x d(\ln x) = -\cos\ln x \Big|_1^{e^\pi} = 2$$

olduğundan,

$$\lim_{t\to 0}\int_1^{e^\pi} \frac{e^{tx}}{x}\sin\ln x dx = 2$$

bulunur.

Teorem 1.23 (**Diferansiyellenebilirlik**). $f(t,x)$, $[a,b]\times[c,d] = D$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli olup $\forall x \in [c,d]$ için $[a,b]$ aralığında t ye göre sürekli kısmi türeve sahip ise, (1.10) eşitliği ile belirlenen $\phi(t)$ fonksiyonu t ye göre türetilebilirdir ve türevi

$$\phi'(t) = \int_c^d f_t(t,x)dx \tag{1.11}$$

şeklindedir. (1.11) eşitliği değişken sınırlı

$$\phi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)dx$$

şeklindeki parametreye bağlı integraller için aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir. $\alpha(t), \beta(t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında türetilebilir fonksiyonlar olduğunda bileşik fonksiyonun türev formülüne göre

$$\phi'(t) = \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)dx\right)'_t = f\Big(t,\beta(t)\Big)\beta'(t) - f\Big(t,\alpha(t)\Big)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(t,x)dx \tag{1.12}$$

olur (Can, 2004).

Örnek 1.24.

$$\phi(t) = \int_{-t}^{\sin t} \frac{dx}{1+t+x}$$

iken, $\phi'(t)$ yi doğrudan ve (1.12) yardımıyla hesaplayınız.

○ Doğrudan hesaplamayla

$$\phi(t) = \int_{-t}^{\sin t} \frac{dx}{1+t+x} = \ln(1+t+x)\Big|_{-t}^{\sin t} = \ln(1+t+\sin t)$$

olup

$$\phi'(t) = \frac{1+\cos t}{1+t+\sin t}$$

bulunur. Diğer taraftan (1.12) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \frac{1}{1+t+\sin t}\cos t + \frac{1}{1+t-t} - \int_{-t}^{\sin t}\frac{dx}{(1+t+x)^2}\\
&= \frac{\cos t}{1+t+\sin t} + 1 + \frac{1}{1+t+x}\Big|_{-t}^{\sin t}\\
&= \frac{1+\cos t}{1+t+\sin t}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\oslash$

Örnek 1.25.

$$\phi(t) = \int_t^{t^2}\frac{\sin xt}{x}dx$$

fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

$\bigcirc$ Görüldüğü gibi $\phi(t)$ elementer bir fonksiyon cinsinden gösterilemediğinden, doğrudan hesaplama yapılamaz. (1.12) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \frac{\sin t^3}{t^2}2t - \frac{\sin t^2}{t} + \int_t^{t^2}\cos xtdx\\
&= \frac{2\sin t^3}{t} - \frac{\sin t^2}{t} + \frac{1}{t}\sin xt\Big|_t^{t^2}\\
&= \frac{3\sin t^3 - 2\sin t^2}{t}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\oslash$

Örnek 1.26. $f(\tau,x)$ fonksiyonu $D=\{(\tau,x): 0<\tau<t, 1<x<e^\pi\}$ bölgesinde sürekli fonksiyon ve $g(t,\tau)=\int_1^{e^\pi} f(\tau,x)e^{\tau-t}\frac{1}{x}\sin\ln xdx$ olmak üzere $\phi(t)=\int_0^t g(t,\tau)d\tau$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

$\bigcirc$ (1.12) formülüne göre

$$\phi'(t) = g(t,t) + \int_0^t g_t(t,\tau)d\tau$$

$g(t,t)=\int_1^{e^\pi} f(t,x)\frac{1}{x}\sin\ln xdx$ ve $g_t(t,\tau) = -\int_1^{e^\pi} f(\tau,x)e^{\tau-t}\frac{1}{x}\sin\ln xdx$ olduğundan

$$\phi'(t) = \int_1^{e^\pi} f(t,x)\frac{1}{x}\sin\ln xdx - \int_0^t\int_1^{e^\pi} f(\tau,x)e^{\tau-t}\frac{1}{x}\sin\ln xdxd\tau$$

elde edilir. $\oslash$

Teorem 1.27 (İntegrallenebilirlik). Eğer $f(t,x) \in C(D)$ ise, (1.10) eşitliği ile belirli $\varphi(t)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b \int_c^d f(t,x)dxdt = \int_c^d \int_a^b f(t,x)dtdx \tag{1.13}$$

eşitliği doğrudur. Yani integral içi fonksiyon sürekli olduğunda integralleme sırası değiştirilebilir (Can, 2004).

1.4. Fourier Serileri

Fourier serileri, matematik ve fizikte pek çok uygulama alanı olan önemli serilerdendir. Fizikte elektromanyetik teori, ısı teorisi, salınım teorisi, kuantum teorisi, akustik, elektronik gibi bir çok alanlardaki uygulamalarda, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde karşımıza çıkar. Taylor serilerinin aksine, Fourier serileri, istenen mertebeden türetilebilir olmaları gerekmeyen ve reel değişkenli olan fonksiyonların, özellikleri iyi bilinen sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yeniden yazılmasıdır ve yazılımın önemi, özellikle uygulamalarda kendini göstermektedir (Öztürk, 2012).

Tanım 1.28.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k coskx + b_k sinkx\big) \tag{1.14}$$

şeklinde belirlenen seriye *trigonometrik seri*, a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, \dots)$ gerçel sabitlerine de *trigonometrik serinin katsayıları* denir.

(1.14) serisinin tüm terimleri $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve 2π ortak devrine sahip fonksiyonlar olduğundan, bu seriyi 2π uzunluklu $[0, 2\pi]$ veya $[-\pi, \pi]$ aralığında incelemek yeterlidir. (1.14) serisinin

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k coskx + b_k sinkx\big) \tag{1.15}$$

şeklindeki n. kısmi toplamına, *trigonometrik çok terimli* denir.

Pozitif terimli

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(|a_n| + |b_n|\big) \tag{1.16}$$

sayı serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Bu seri $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanmış ve (1.14) trigonometrik serisinin sınırlayanı olduğundan (1.14) düzgün yakınsaktır. Böylece (1.16) serisinin yakınsaklığı durumunda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n cosnx + b_n sinnx\big) \tag{1.17}$$

eşitliğini sağlayan 2π devirli bir $f(x)$ fonksiyonu vardır (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009). 2π devirli $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx, \qquad \big(x \in (-\pi, \pi)\big) \tag{1.18}$$

şeklinde düzgün yakınsak trigonometrik seriye açılmış olduğunu varsayalım. a_0, a_n, b_n katsayılarını bulmak için düzgün yakınsak serinin terim terim integrallenebildiğine dayanarak (1.18) eşitliği üzerinde aşağıdaki işlemleri yapalım.
Her iki tarafı $[-\pi, \pi]$ aralığında integralini alalım.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx\right). \tag{1.19}$$

Burada, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 \quad \text{veya} \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

olur. Benzer şekilde eşitliğin her iki tarafını $\cos kx$ ile çarpıp $[-\pi, \pi]$ aralığında integralini alalım. İşlem yaparken $\cos kx$ ile çarpmanın düzgün yakınsaklığı bozmayacağına dikkat edelim.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kxdx.$$

Burada, $\sin nx$ ve $\cos nx$ fonksiyonlarının ortogonallikleri göz önüne alınırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \pi a_n \qquad \text{veya} \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = \overline{1, \infty})$$

olur. Son olarak eşitliğin her iki tarafını $\sin kx$ ile çarpıp $[-\pi, \pi]$ aralığında integralini alırsak

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kxdx.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \pi b_n \qquad \text{veya} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = \overline{1,\infty})$$

elde edilir. Böylece (1.18) serisinin düzgün yakınsaklığı durumunda, katsayıları belirlemek için

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \qquad (n = \overline{1,\infty}) \end{aligned} \tag{1.20}$$

formüllerini elde etmiş oluruz. $n = 0$ durumunda a_n in formülünden a_0 ın formülü elde edilir. Bu yüzden (1.18) serisinde ilk terim a_0 olarak değil $\frac{a_0}{2}$ olarak kabul edilir.

Katsayıları, (1.20) formülleri ile belirlenmiş (1.18) serisine *Fourier serisi*, a_0, a_k, b_k gerçel sayılarına ise *Fourier katsayıları* denir. (1.18) serisi düzgün yakınsak olduğundan, her düzgün yakınsak trigonometrik seri, kendi toplamının Fourier serisidir, denilebilir. (1.18) eşitliğine, $f(x)$ *fonksiyonunun Fourier serisine açılımı* da denir (Brown and Churchill, 1993; Clarke; Elias and Rami, 2002; Enrique and Velasco, 1996; Haberman, 2005; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Hanna and Rowland, 1990; Strauss, 2008; Pinsky, 2011).

Fourier katsayılarını belirlerken, (1.18) serisinin düzgün yakınsak olduğunu kabul ettik. Şimdi katsayıları (1.20) formülleri ile belirlenen serinin düzgün yakınsak olması için, $f(x)$ in hangi koşulları sağlaması gerekir sorusuna cevap verelim. Bunun için önce aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 1.29. Türevi $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli olan fonksiyona bu aralıkta *parçalı diferansiyellenebilir fonksiyon* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Tanım 1.30. $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli $f(x)$ fonksiyonu, bu aralığın sonlu sayıda noktası hariç, diğer tüm noktalarında sürekli türeve sahip olup, sözü edilen sonlu sayıda noktada sağ ve sol türevlere sahip ise, bu fonksiyona $[a, b]$ aralığında *parçalı pürüzsüz fonksiyon* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Pinsky, 2011).

Teorem 1.31. 2π devirli $f(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli olup, 2π uzunluklu her aralıkta parçalı diferansiyellenebilir ise onun Fourier serisi kendisine düzgün olarak yakınsar (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Pinsky, 2011).

Teorem 1.32 (Dirichlet). 2π devirli $f(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı pürüzsüz ise, onun *Fourier Serisi* aralığın her noktasında yakınsaktır ve toplamı da;

1. Fonksiyonun süreklilik noktalarında kendisine,
2. İç süreksizlik noktalarında bu noktalardaki sağ ve sol limitinin ortalamasına,
3. $-\pi$ ve π de ise bu uç noktalardaki değerlerinin ortalamasına eşittir (Elias and Rami, 2002; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Hanna and Rownland, 1990; Pinsky, 2011).

Eğer simetrik aralıkta verilen $f(x)$ fonksiyonu tek (çift) ise simetrik aralıkta tek (çift) fonksiyonun integralinin özelliğine dayanarak katsayılar daha basit bulunur.

$f(x)$ in tek fonksiyon olması durumunda, onun Fourier serisi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{1.21}$$

ve Fourier katsayıları da

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \qquad (n = \overline{1, \infty}) \tag{1.22}$$

formülleri ile hesaplanır (Elias and Rami, 2002; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

$f(x)$ in çift fonksiyon olması durumunda ise Fourier serisi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

ve Fourier katsayıları da

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad (n = \overline{1, \infty}) \end{aligned} \tag{1.23}$$

formülleri ile hesaplanır (Elias and Rami, 2002; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).
$[a, b]$ aralığında verilen parçalı pürüzsüz fonksiyonun Fourier serisine açılımı

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right).$$

Burada eşitlik, fonksiyonun süreklilik noktalarında doğrudur. $f(x)$'in Fourier katsayıları ise

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)dx \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)dx \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir (Elias and Rami, 2002; Haberman, 2005; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Pinsky, 2011; Strauss, 2008).

Tanım 1.33 (Genelleştirilmiş Fourier Serisi). $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlardan oluşan

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{1.24}$$

ortogonal fonksiyonlar sistemi verilmiş olduğunu varsayıp

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{1.25}$$

serisini yazalım. Burada c_n ler ($n = \overline{1,\infty}$) gerçel katsayılardır. (1.25) serisinin bir $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını varsayalım ($x \in [a,b]$).

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{1.26}$$

(1.26) eşitliğinin her iki tarafını $\varphi_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) ile çarpıp, $[a,b]$ aralığı üzerinde integralini alırsak, (1.24) sisteminin ortogonalliği göz önüne alındığında

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx$$

veya

$$c_n = \frac{1}{||\varphi_n||^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \qquad (n = \overline{1,\infty}) \tag{1.27}$$

olur.

Katsayıları (1.27) eşitlikleri ile belirlenen (1.25) serisine, $f(x)$ fonksiyonunun (1.24) sistemi cinsinden *Fourier serisi*, c_n lere de $f(x)$ in bu sistem cinsinden *Fourier katsayıları* denir (Brown and Churchill, 1993; Clarke; Elias and Rami, 2002; Enrique and Velasco, 1996; Haberman, 2005; Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Hanna and Rowland, 1990; Strauss, 2008; Pinsky, 2011).

Tanım 1.34. Herhangibir n için, (1.24) sisteminin,

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$$

fonksiyonlarının

$$\Phi_n(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) \tag{1.28}$$

doğrusal birleşimini oluşturalım. Burada $\Phi_n(x)$ e, (1.24) sistemi üzere *n.basamaktan çokterimli* denir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.35 (Bessel Eşitsizliği). $f(x) \in L^2[a,b]$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu (1.24) sistemi üzere açılmış ve c_n ler (1.27) eşitlikleri ile belirlenmiş olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||\varphi_n||^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \tag{1.29}$$

eşitsizliği doğrudur (Myint and Debnath, 2007).

Tanım 1.36. $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar kümesi $P[a,b]$ olmak üzere $f(x) \in P[a,b]$ olsun. Eğer $f(x)$ in (1.24) sistemi üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ Fourier serisi, ortalama karesel anlamında yakınsaksa yani

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n\right]^2 dx = 0$$

ise o zaman (1.24) sistemine $P[a,b]$ de *tam sistem* denir ve bu sistem $P[a,b]$ nin bir bazı olarak kabul edilir. Yani $P[a,b]$ deki her fonksiyon (1.24) sisteminin bir doğrusal birleşimi olarak yazılabilir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Teorem 1.37 (Parseval Eşitliği). (1.24) sisteminin $P[a,b]$ de tam olması için her $f(x) \in P[a,b]$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||\varphi_n||^2 = \int_a^b f^2(x)dx$$

koşulunun sağlanması gerek ve yeterdir (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009; Myint and Debnath, 2007).

Tanım 1.38 (Kapalı Sistem). (1.24) sisteminin her elemanına ortogonal olan farklı bir $g(x) \in P[a,b]$ fonksiyonu sıfıra eşit ise, sözü edilen sisteme $P[a,b]$ de *kapalı sistem* denir.

Tam sistem aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $P[a,b]$ de ortogonal (1.24) sistemi tam ise, aynı zamanda kapalıdır.

2. $f(x), g(x) \in P[a,b]$ fonksiyonları $[a,b]$ de tam ortogonal (1.24) sistemi üzere aynı Fourier katsayılarına sahipse, o zaman onlar $P[a,b]$ de eşittirler.

3. $f(x), g(x) \in P[a,b]$ ve $[a,b]$ de ortogonal (1.24) sistemi tam ise, $f(x)$ in $[a,b]$ aralığı üzerinde Fourier serisi terim terim integrallenebilirdir, yani, $\forall x_0, x \in [a,b]$ için

   $\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x} \varphi_n(\xi)d\xi$ eşitliği doğrudur (Halilov ve Hacısalihoğlu, 2009).

Örneğin;

1. $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots,$ sistemi $P[-\pi,\pi]$ de
2. $\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots,$ sistemi $P[0,\pi]$ de
3. $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots,$ sistemi $P[0,\pi]$ de tam sistem oluşturur.

Örnek 1.39. $f(x) = x^2, \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

○ Verilen fonksiyon çifttir. Onu $(-\infty,\infty)$ aralığına 2π devirli olarak devam ettirirsek elde edilen fonksiyonun, her 2π uzunluklu aralıkta sürekli olup, türevi parçalı süreklidir. O halde teorem 1.31 den dolayı Fourier serisi reel eksenin tümünde kendine yakınsar. Şimdi katsayıları fonksiyonun çiftliğini dikkate alarak belirleyelim.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad (n = \overline{1,\infty})$$

O halde tüm reel eksende

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

eşitliği doğrudur. Burada $x = 0$ ve $x = \pi$ alınırsa sırasıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

eşitliklerini elde ederiz. $\oslash$

Örnek 1.40. $f(x)$ =sign(x), $\quad(-\pi < x < \pi)$ fonksiyonu Fourier serisine açınız.

○ Verilen fonksiyonun tek olduğunu dikkate alırsak, (1.22) eşitliği yardımıyla b_n katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & n \text{ tek ise} \\ 0, & n \text{ çift ise} \end{cases} \end{aligned}$$

yani $b_{2n-1} = \dfrac{4}{\pi(2n-1)}$, $b_{2n} = 0$ olarak bulunmuş olur. Böylece, $-\pi < x < \pi$ aralığında

$$\text{sign}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

açılımı elde edilir.

Elde edilen açılımda $x = \dfrac{\pi}{2}$ alırsak

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad \text{veya} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

eşitliğini elde ederiz. $\oslash$

1.5. Euler Denklemi

Tanım 1.41. $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x^2y'' + pxy' + qx = 0$$

şeklindeki denkleme *2. mertebeden Euler denklemi* denir. Denklemin şeklinden görülüyor ki onun çözümü $y(x) = x^r$ şeklinde aranmalıdır. Gerekli türevler alınıp denklemde yerlerine konursa

$$r^2 + (p-1)r + q = 0$$

karakteristik denklemini elde ederiz ve bu köklere bağlı olarak genel çözümler aşağıdaki gibidir.

1. $r_1 \neq r_2$ ve gerçel olduğunda, özel çözümler $y_1(x) = x^{r_1}$, $y_2(x) = x^{r_2}$, genel çözüm ise

$$y(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

olur.

2. $r_1 = r_2 = r$ olduğunda, özel çözümler $y_1(x) = x^r$, $y_2(x) = x^r \ln x$, genel çözüm ise

$$y(x) = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x \quad \text{veya} \quad y(x) = x^r (C_1 + C_2 \ln x)$$

olur.

3. $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ olduğunda, $e^{lnx} = x$ olduğu dikkate alınırsa, özel çözümler $y_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$, $\quad y_2(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ genel çözüm ise

$$y(x) = x^\alpha \left(C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)\right)$$

olur.

Eğer $x < 0$ ise bulunan genel çözümlerde x yerine gerektiğinde $|x|$ yazılır (Halilov, 2006; Ravi and O'Regan, 2009; Shempley, 1984).

1.6. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısı iki veya daha fazla ise bu denkleme *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem (KTDD)* denir. Genel olarak bir KTDD, $x, y, \ldots$ bağımsız değişkenler ve $u(x, y, \ldots)$ bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) olmak üzere

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0 \tag{1.30}$$

şeklinde yazılır. Burada $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots$ bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleridir ve bunların herbiri

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

şeklinde ifade edilir (Asmar, 2004; Çağlıyan ve Çelebi, 2010; Çiftçi, 2007; Myint and Debnath, 2007; Strauss, 2008;).

Bir KTDD bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun tüm türevlerine göre doğrusal bir bağıntı ise bu denkleme *doğrusal denklem* denir. Genel olarak ikinci mertebeden kısmi türevlere göre doğrusal olan diferansiyel denklem

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \tag{1.31}$$

eşitliği ile verilir. Burada $a_{11}(x,y), a_{12}(x,y), a_{22}(x,y)$ fonksiyonları herhangi bir kapalı bölgede sürekli fonksiyonlardır.

Tanım 1.42. (1.31) denkleminde terimlerinin katsayılarının oluşturduğu

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{12}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{vmatrix}$$

determinanta, sözü edilen denklemin *diskriminantı* denir ve $\Delta(x,y)$ ile gösterilir. (1.31) denklemi

1. $\Delta(x,y) > 0$ olduğu bölgede *eliptik denklem,*
2. $\Delta(x,y) = 0$ olduğu bölgede *parabolik denklem,*
3. $\Delta(x,y) < 0$ olduğu bölgede *hiperbolik denklem*

olarak adlandırılır (Myint and Dabnath, 2007). Verilen bir değişken katsayılı ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin diskriminantı tanımlı olduğu bölgenin belli bir kısmında pozitif, belli bir kısmında sıfır, belli bir kısmında da negatif olabilir. O halde, sözü edilen bölgelerde denklem eliptik, parabolik ve hiperbolik olur. Örneğin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y)$$

denklemi $y > 0$ (üst yarı düzlem) için eliptik, $y = 0$ (apsisler ekseni) için parabolik, $y < 0$ (alt yarıdüzlem) için hiperbolik olur.

1.7. Sınır Değer Problemleri

$p_0(x), p_1(x), p_2(x), r(x)$, $[\alpha,\beta]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. İkinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x), \qquad x \in [\alpha,\beta] \tag{1.32}$$

şeklinde olup genel sınır koşulları da, $a_i, b_i, c_i, d_i, \quad i = 0,1$ ve A, B keyfi sabitler olmak üzere

$$B_1[y] \equiv a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) + b_0 y(\beta) + b_1 y'(\beta) = A \tag{1.33}$$

$$B_2[y] \equiv c_0 y(\alpha) + c_1 y'(\alpha) + d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) = B \tag{1.34}$$

şeklinde verilmişse (1.32)-(1.34) eşitliklerine *türdeş olmayan doğrusal sınırdeğer problemi* denir.

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad x \in [\alpha, \beta]$$
$$B_1[y] \equiv 0$$
$$B_2[y] \equiv 0$$

problemine ise *türdeş doğrusal sınırdeğer problemi* denir. Sınır koşulları için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1. İlk Sınır Koşulları,

$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B$$

2. İkinci Sınır Koşulları,

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= A, \quad y'(\beta) = B \quad \text{veya} \\ y'(\alpha) &= A, \quad y(\beta) = B \end{aligned}$$

3. Sturm-Liouville Sınır Koşulları, $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ ve $d_0^2 + d_1^2 \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) &= A, \\ d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) &= B, \end{aligned}$$

4. Periyodik Sınır Koşulları,

$$y(\alpha) = y(\beta), \quad y'(\alpha) = y'(\beta)$$

olmak üzere dört çeşittir (Al-Gwaiz, 2008; Allan, 2002; Brown and Churchill, 1993; Ravi and O'Regan, 2009).

1.8. Sturm-Liouville Problemleri

$a_i, d_i,\ \ i = 0, 1$ keyfi sabitler olmak üzere

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad x \in [\alpha, \beta] \tag{1.35}$$

denklemi ve sınır koşulları

$$a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) = 0, \quad a_0^2 + a_1^2 \neq 0 \tag{1.36}$$

$$d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) = 0, \quad d_0^2 + d_1^2 \neq 0 \tag{1.37}$$

verilmiş olsun. (1.35) denkleminin (1.36) ve (1.37) koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına *Sturm-Liouville Problemi* denir. Burada, λ parametre, $q, r \in C[\alpha, \beta]$, $p(x) \in C^1[a, b]$ ve $\forall x \in [\alpha, \beta]$ için $p(x), r(x) > 0$. Görüldüğü gibi $y(x) \equiv 0$, (1.35) denkleminin her zaman çözümüdür (Al- Gwaiz, 2008; Enrique and Velasco, 1996; Halilov, 2006).

Tanım 1.43 (**Özdeğer ve Özfonksiyon**). (1.35)-(1.36),(1.37) problemine sıfırdan farklı çözümler sağlayan λ sayılarına sözü edilen problemin *özdeğerleri*, bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı $\varphi_\lambda(x)$ çözümlerine de *özfonksiyonları* denir (Al-Gwaiz, 2008; Halilov, 2006).

Bir Sturm-Liouville Probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 1.44. $p(x) \in C^1[a, b]$, $r(x) \in C[a, b]$ pozitif, $q(x) \in C[a, b]$ gerçel fonksiyonlar ve $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ ise $[a, b]$ aralığında (1.35)-(1.36),(1.37) probleminin gerçel λ_n özdeğerleri ve onlara karşılık gelen $\varphi_n(x)$ özfonksiyonları vardır ve bunlar aşağıdaki özelliklere sahiptir

1. Özdeğerler negatif değildir ve

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty \tag{1.38}$$

   koşullarını sağlar.

2. Farklı özdeğerlere farklı özfonksiyonlar karşılık gelir. Yani $\lambda_n \neq \lambda_k$ için $\varphi_n(x) \neq \varphi_k(x)$ olur. $(n, k = \overline{1, \infty}, n \neq k)$

3. $\varphi_n(x)$ fonksiyonlar sistemi $(n = \overline{1, \infty})$ $[a, b]$ aralığında $r(x)$ ağırlıklı ortogonal sistem oluşturur.

4. $\varphi_n(x)$ özfonksiyonunun, (a, b) aralığında $n-1$ sayıda sıfırı vardır (Haberman, 2005; Halilov, 2006).

1.9. Fourier Yöntemi

Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümündeki keyfi fonksiyonların önceden verilen koşullar sağlanacak şekilde tayin edilmesi zor hatta bazen imkansızdır. Ayrıca bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünü bazı özel haller dışında elde etmek mümkün değildir. Bundan dolayı sınır değer problemlerini çözmek için özel yöntemlere başvurulur. Sınır değer problemini çözmek için elementer fakat çok kullanışlı bir yöntem Fourier yöntemi diğer bir adıyla değişkenlerin ayrılması yöntemidir. Özel olarak ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0 \tag{1.39}$$

doğrusal kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada A, B, C, D, E, F katsayıları x ve y 'nin verilmiş fonksiyonlarıdır. Bu denklemin

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{1.40}$$

biçimindeki çözümlerini arayalım. (1.40) ve türevlerini (1.39) de yerlerine yazalım.

$$AX''Y + 2BX'Y' + CXY'' + DX'Y + EXY' + FXY = 0. \tag{1.41}$$

Eğer (1.41) denklemini

$$\frac{1}{X} f(x, D_x)X = \frac{1}{Y} g(y, D_y)Y \tag{1.42}$$

biçiminde yazılabilirse, (1.39) denklemine *değişkenlerine ayrılabilirdir* denir. Burada $f(x, D_x)$ ve $g(y, D_y)$ diferansiyel operatörlerdir. (1.42) denkleminin sol tarafı yalnızca x değişkeninin bir fonksiyonu ve sağ tarafı da yalnızca y değişkeninin bir fonksiyonudur. Böylece farklı değişkenlere bağlı iki fonksiyonun birbirine eşit olması, her iki fonksiyonun aynı bir λ sabitine eşit olmasıyla mümkündür. O halde

$$\frac{1}{X} f(x, D_x)X = \frac{1}{Y} g(y, D_y)Y = \lambda \tag{1.43}$$

ve buradan da

$$f(x, D_x)X - \lambda X = 0; \qquad g(y, D_y)Y - \lambda Y = 0 \tag{1.44}$$

elde edilir. Bu denklemler ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin her ikisi de aynı ayırma sabiti adını alan λ parametresine bağlıdır (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

Şimdi, ileride çözeceğimiz değişken katsayılı parabolik denkleme yardımcı olması için aşağıdaki parabolik denklem için sınır değer problemini çözelim.

Örnek 1.45.

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} && (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u(0, x) &= \varphi(x) && (0 < x < l) \\ u(t, 0) &= 0 && (t > 0) \\ u(t, l) &= 0 && (t > 0) \end{aligned} \tag{1.45}$$

sınır değer problemini ele alalım. Burada problem fiziksel olarak, l uzunluğunda, yüzeyi yalıtılmış ve uç noktalarında sıcaklığı sıfır olan türdeş bir çubuktaki ısı dağılımını verir. Burada $\varphi(x)$ çubuğun başlangıç sıcaklığını; $u(t, x)$ ise herhangi bir t anında çubuğun x noktasındaki sıcaklığını göstermektedir. Bu problemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözelim

Çözümü

$$u(t, x) = T(t)X(x) \tag{1.46}$$

biçiminde arayalım. Gerekli türevleri alıp u_t ve u_{xx} i denklemde yerlerine yazarsak

$$T'X = a^2 T X''$$

veya λ bir sabit olmak üzere

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

bulunur. Buradan da

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir. $u(t, 0) = T(t)X(0) = 0$ ve $u(t, l) = T(t)X(l) = 0$ sınır koşulları keyfi t için sırasıyla

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) &= 0 \end{aligned} \tag{1.47}$$

olmak üzere Sturm-Liouville problemini elde ederiz. $\lambda < 0$ ve $\lambda = 0$ için sıfırdan farklı çözüm yoktur. Bu problemin özdeğer ve öz fonksiyonlarını sırasıyla

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad (n = 1, 2, \dots)$$
$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

olur. Benzer şekilde

$$T_n(t) = C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}$$

olur. Böylece parabolik denklemin sınır koşullarını sağlayan çözümleri, $A_n = B_n C_n$ olmak üzere

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

olur. Ele alınan denklem doğrusal olduğundan süperpozisyon ilkesine göre

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1.48}$$

elde edilen seri yakınsak ve x e göre iki, t ye göre birkez türetilebilir olmak koşuluyla ele alınan denklemi ve sınır koşullarını sağlar. Şimdi başlangıç koşulu yardımıyla A_n katsayılarını belirleyelim.

$$u(0,x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

son eşitlikten görülüyor ki $\varphi(x)$ başlangıç fonksiyonu, Fourier katsayıları

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (= \varphi_n) \tag{1.49}$$

olan Fourier sinüs serisine açılabilmelidir. Böylece ele alınan problemin biçimsel çözümü (1.49) katsayıları ile belirli (1.48) eşitliğidir.

Şimdi, eğer $\varphi(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ aralığında Dirichlet teoreminin koşullarını ve $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ koşullarını sağlarsa bu biçimsel çözümün klasik anlamda çözümü olduğunu gösterelim.

$\varphi(x)$ sınırlı olduğundan

$$|\varphi_n| = \frac{2}{l}\left|\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right| \leq \frac{2}{l}\int_0^l |\varphi(x)|\, dx \leq C$$

elde edilir. Burada C, pozitif bir sabittir. Dolayısıyla $t \geq t_0 > 0$ koşulunu sağlayan t ler için

$$\left|\varphi_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \leq Ce^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t_0}$$

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t_0}$ serisi (1.48) serisinin sınırlayanıdır. Bu durumda Weierstrass ölçütüne göre (1.48) serisi, $0 \leq x \leq l, \;\; t \geq t_0$ bölgesinde düzgün yakınsaktır. Düzgün yakınsak sürekli bir fonksiyonun, limiti de sürekli olduğundan (1.48) çözümü $0 \leq x \leq l, \;\; t \geq t_0$ bölgesinde süreklidir. Burada $u(t,x)$ in başlangıç koşullarını sağladığı kolayca görülür. Şimdi $u(t,x)$ in $0 \leq x \leq l, \;\; t \geq t_0$ bölgesinde denklemi sağladığını gösterelim. Bunun için (1.48) serisinin t ye göre bir kez x e göre iki kez terim terim türevini alıp elde edilen serilerin de sözü edilen bölgede mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu göstermek gerekir. Bunlar sırasıyla $t \geq t_0 > 0$ için

$$\left|\varphi_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \leq Ca^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t_0}$$

ve

$$\left|\varphi_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \leq C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t_0}$$

eşitsizliklerinden ve Weierstrass ölçütünden görülür. Böylece

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \\ u_{xx} &= -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \tag{1.50}$$

olup buradan

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

elde edilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada önce

$$u_t = a^2 \left(x^2 u_{xx} + x u_x \right) \tag{2.1}$$

olmak üzere türdeş denklem için (0.2) ve (0.3) koşulları dahilinde karışık problemin çözümü

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

olmak üzere değişkenlere ayırma yöntemi ile aranarak, $X(x)$ bilinmeyeni için Sturm-Liouville problemi elde edilmiş ve bu problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunduktan sonra, (2.1), (0.2), (0.3) probleminin çözümü bulunmuştur.

Daha sonra ise bulunan özfonksiyonların yardımıyla (0.1)-(0.4) probleminin çözümü seri şeklinde aranarak bulunmuş ve başlangıç verilerinin sağlaması gereken koşullar belirlenmiştir.

Ayrıca ele alınan problem için kaynak fonksiyonunun şekli belirlenmiş ve bunun yardımıyla gerek türdeş problemin, gerekse de türdeş olmayan problemin çözüm formülü bulunmuştur. Her iki durum için somut örnekler verilmiştir.

3. BULGULAR

3.1. Euler Tipi Türdeş Parabolik Denklem İçin Karışık Problemin Çözümü

Bu bölümde $D = \{0 < t < T < \infty, 1 < x < e^{\pi}\}$

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(x^2 u_{xx} + x u_x) && (3.1) \\ u(0,x) &= \varphi(x), \qquad 1 \le x \le e^{\pi} && (3.2) \\ u(t,1) &= u(t,e^{\pi}) = 0, \qquad t \ge 0 && (3.3) \end{aligned}$$

olmak üzere karışık problemin çözümünü ele alacağız. (Söz konusu problemde hem başlangıç hem de sınır koşulları bulunduğundan, onu karışık problem diye adlandıracağız.) Ele alınan problemin çözümünü

$$u(t,x) = T(t)X(x) \tag{3.4}$$

olmak üzere değişkenlerine ayırma yöntemi ile arayalım. (sözkonusu yöntem Fourier yöntemi olarak da adlandırılır.) $T = T(t)$, $X = X(x)$ bilinmeyenlerini belirlemek için, $u_t = T'(t)X(x)$, $u_x = T(t)X'(x)$ ve $u_{xx} = T(t)X''(x)$, ifadelerini (3.1) de yerlerine yazıp, gerekli işlemleri yapalım.

$$T'X = a^2(x^2 T X'' + xTX'),$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{x^2 X'' + xX'}{X} \quad . \tag{3.5}$$

(3.5) eşitliğinde sol taraf sadece t ye, sağ taraf ise sadece x e bağlı olduğundan bu iki oran sabit $(-\lambda)$ olmalıdır. Çünkü, sol tarafta t nin değişmesi sağ tarafı; sağ tarafta ise x in değişmesi sol tarafı etkilemez.

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{x^2 X'' + xX'}{X} = -\lambda. \tag{3.6}$$

Önce (3.6) dan

$$x^2 X'' + xX' + \lambda X = 0 \tag{3.7}$$

denklemini yazalım. Görüldüğü gibi (3.7) denklemi, $X(x)$ bilinmeyenli ikinci mertebeden Euler denklemidir. Sınır koşullarını belirlemek için (3.4) ve (3.3) eşitliklerinden faydalanalım.

$$T(t)X(1) = 0 \quad , \qquad T(t)X(e^{\pi}) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$X(1) = 0 \quad , \qquad X(e^{\pi}) = 0.$$

Böylece $X(x)$ bilinmeyenini belirlemek için

$$\left.\begin{aligned} x^2X'' + xX' + \lambda X &= 0 \\ X(1) = X(e^{\pi}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Sturm-Liouville problemi elde edilir.

(3.8) problemine sıfırdan farklı çözüm sağlayan λ sayılarını (yani özdeğerlerini) ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların varlığını inceleyelim.

Görüldüğü gibi, (3.7) Euler denkleminin özel çözümü

$$X(x) = x^r \tag{3.9}$$

şeklinde aranmalıdır ($r =?$). Buradan $X'(x) = rx^{r-1}, \quad X''(x) = r(r-1)x^{r-2}$ bulup, $X(x),\ X'(x), X''(x)$ ifadelerini denklemde yerlerine yazalım.

$$\begin{aligned} r(r-1)x^r + rx^r + \lambda x^r &= 0 \\ r^2 - r + r + \lambda &= 0 \\ r^2 + \lambda &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Böylece (3.7) denkleminin karekteristik denklemini (3.10) şeklinde bulmuş oluruz. λ nın işaretlerine bağlı olarak, (3.8) probleminin sıfırdan farklı çözümünün varlığını inceleyelim.

1. $\lambda < 0$ durumu: Bu durumda $-\lambda > 0$ olur. $-\lambda = \upsilon^2$ olarak kabul edildiğinde (3.10) denkleminden

$$r^2 = \upsilon^2 \Rightarrow \ r_{1,2} = \pm\upsilon$$

bulunur. Bunu (3.9) da dikkate alırsak, özel çözümleri

$$X_1(x) = x^{\upsilon}, \qquad X_2(x) = x^{-\upsilon}$$

olarak buluruz ve (3.7) denkleminin genel çözümü

$$X(x) = C_1x^{\upsilon} + C_2x^{-\upsilon}$$

olarak yazılabilir. C_1 ve C_2 sabitlerini belirlemek için (3.8) probleminin sınır koşullarını kullanalım.

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 0 \\ C_1 e^{\pi v} + C_2 e^{-\pi v} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

2. $\lambda = 0$ durumu: Bu durumda $v = 0$ ve $r_{1,2} = 0$ olur. Bu yüzden de, özel çözümler

$$X_1(x) = 1, \qquad X_2(x) = \ln x,$$

genel çözüm ise

$$X(x) = C_1 + C_2 \ln x$$

olur. Buradan da, sınır koşullarını kullanarak

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 \ln 1 & = & 0 \\ C_1 + C_2 \ln e^{\pi} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

buluruz. Demek ki, $\lambda = 0$ da da (3.8) probleminin sıfırdan farklı çözümü yoktur. Başka bir deyişle, bu durum için de, söz konusu problemin özdeğer ve özfonksiyonları yoktur.

3. $\lambda > 0$ durumu: Bu durum için karekteristik denklemin çözümleri

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

olarak bulunur. Bu durumda, $x = e^{\ln x}$ özdeşliğini kullanırsa, çözümü

$$x^{\pm i\sqrt{\lambda}} = e^{\ln x^{\pm i\sqrt{\lambda}}} = e^{\pm i\sqrt{\lambda}\ln x} = \cos(\sqrt{\lambda}\ln x) \pm i\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

şeklinde yazabiliriz. Karmaşık çözümün gerçel ve sanal kısımlarının da çözüm olduğu dikkate alındığında, buradan özel çözümleri

$$X_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda}\ln x), \qquad X_2(x) = \sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

olarak buluruz. Genel çözüm ise

$$X(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

olur. Sınır koşullarını kullanırsak

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 0 & = & 0 \\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad C_1 = 0, \quad C_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

elde ederiz.Son eşitlikte $C_2 = 0$ olamaz (yine sıfır çözüm elde edildiğinden). O halde

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = k\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = k, \quad (k = \overline{1,\infty})$$

buluruz.

Böylece, (3.8) Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri $\lambda_k = k^2$, $(k = \overline{1,\infty})$ olarak bulunur.

Bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$X_k(x) = A_k \sin k \ln x, \qquad (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.11}$$

olacağı açıktır. Burada $C_k = A_k$ olarak kabul edilmiştir.

(3.8) problemi

$$\left.\begin{array}{rcl} (xX'(x))' + \dfrac{\lambda}{x}X(x) & = & 0, \\ X(1) = X(e^\pi) & = & 0 \end{array}\right\}$$

şeklinde yazılabildiğinden, genel teoriye göre (3.11) özfonksiyonları $[1, e^\pi]$ aralığında $\dfrac{1}{x}$ ağırlıklı ortogonal sistem oluşturur ve

$$\begin{aligned} \int_1^{e^\pi} \sin^2(k \ln x)\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}\int_1^{e^\pi} (1 - \cos(2k\ln x))\, d\ln x \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln x\Big|_1^{e^\pi} - \frac{1}{2k}\sin(2k\ln x)\Big|_1^{e^\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

yani

$$\int_1^{e^\pi} \sin^2(k\ln x)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{3.12}$$

eşitliği doğrudur.

Şimdi, bulunan özdeğerleri kullanarak, (3.6) eşitliklerinden

$$\frac{T_k'(t)}{a^2 T_k(t)} = -k^2$$

yazıp buradan da

$$\frac{dT_k(t)}{T_k(t)} = -a^2k^2 dt \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{T_k(t)}{B_k} = -a^2k^2t,$$

sonuçta ise

$$T_k(t) = B_k e^{-a^2k^2t}, \qquad (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.13}$$

buluruz. $X_k(x)$ ve $T_k(t)$ için bulunan ifadeleri (3.4) eşitliğinde yerlerine yazarsak, (3.1) denkleminin (3.3) koşullarını sağlayan özel çözümlerini

$$u_k(t,x) = C_k e^{-a^2k^2t} \sin k \ln x, \qquad (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.14}$$

olarak buluruz. Burada $A_k B_k = C_k$ olarak kabul edilmiştir.
$u_k(t,x)$ çözümlerine,(3.1),(3.3) sınır değer probleminin özfonksiyonları da denir. (3.1) denklemi doğrusal ve türdeş olduğundan, (3.14) çözümlerinin toplamı da onun çözümü olur.

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2k^2t} \sin(k \ln x). \tag{3.15}$$

Şimdi başlangıç koşulu yardımıyla C_k katsayılarını belirleyelim. Bunun için (3.15) da $t = 0$ alıp (3.2) koşulunu kullanalım.

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k \ln x) = \varphi(x) \tag{3.16}$$

Son eşitlikten görülüyor ki, C_k lar, $\varphi(x)$ fonksiyonunun $[1, e^\pi]$ aralığında $\{\sin(k \ln x)\}$ fonksiyonlar sistemi üzere Fourier katsayılarıdır ($C_k = \varphi_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_1^{e^\pi} \varphi(\xi) \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) d\xi$, $k = \overline{1,\infty}$). Böylece (3.1)-(3.3) probleminin biçimsel çözümü

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2k^2t} \sin(k \ln x) \tag{3.17}$$

olarak bulunmuş olur.

φ_k ifadesini (3.17) de yazıp, biçimsel olarak integral ile toplam işaretlerinin yerlerini değiştirirsek, aranan çözüm

$$u(t,x) = \int_1^{e^\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2a^2t} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x) \right) \varphi(\xi) d\xi \tag{3.18}$$

şeklini alır. Burada

$$G(t,\xi,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2a^2t} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x) \tag{3.19}$$

olarak kabul edersek, problemin çözümünü

$$u(t,x) = \int_1^{e^\pi} G(t,\xi,x) \varphi(\xi) d\xi \tag{3.20}$$

şeklinde yazabiliriz. $G(t,\xi,x)$ fonksiyonuna (3.1)-(3.3) probleminin *kaynak fonksiyonu* denir.

$\{0 < t \leq T, 1 \leq x \leq e^{\pi}\}$ bölgesinde (3.19) eşitliğinin sağ tarafındaki serinin ve onun t ye göre bir, x e göre iki kere terim terim türetilmesinden elde edilen serilerin düzgün yakınsaklığı d'Alembert ölçütünün yardımıyla kolaylıkla görülebilir. Yani, $G(t,\xi,x)$ fonksiyonu ve onun $G_t(t,\xi,x)$, $G_x(t,\xi,x)$, $G_{xx}(t,\xi,x)$ türevleri sözü edilen bölgede sürekli fonksiyonlardır. Başka bir deyişle, (3.20) eşitliği ile belirlenen $u(t,x)$ fonksiyonu ve onun u_t, u_x, u_{xx} kısmi türevleri sözü edilen bölgede süreklidirler ve $u(t,x)$ fonksiyonu da (3.1) denklemini sağlar (bu deneme yoluyla kolaylıkla yapılabilir.)

Böylece, (3.1)-(3.3) problemi ile ilgili aşağıdaki teoremin doğruluğu söylenebilir.

Teorem 3.1. $\varphi(x)$ fonksiyonu $[1, e^{\pi}]$ aralığında sürekli olup, parçalı türetilebilir ve $\varphi(1) = \varphi(e^{\pi}) = 0$ uyum koşullarını sağladığında (3.1)-(3.3) probleminin tek çözümü var ve (3.20) eşitliği ile belirlenir. Çözümün tekliği problemin şeklinden görülmektedir.

Örnek 3.2.

$$\begin{aligned} u_t &= x^2 u_{xx} + x u_x \\ u(0,x) &= \sin\ln x, \qquad 1 \leq x \leq e^{\pi} \\ u(t,1) &= u(t,e^{\pi}) = 0, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

Sınır-değer problemini çözünüz.

○ Verilerin, Teorem (3.1) in koşullarını sağladığı açıktır. Basitlik için problemi (3.20) formülü yardımıyla çözelim. $\varphi(x) = \sin\ln x$ olduğunu göz önünde bulundurarak $G(t,\xi,x)$ kaynak fonksiyonunun yardımıyla (3.20) formülündeki integrali hesaplayalım.

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_1^{e^{\pi}} G(t,\xi,x)\varphi(\xi)d\xi = \int_1^{e^{\pi}} \left(\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\frac{1}{\xi}\sin(k\ln\xi)\sin(k\ln x)\right)\sin\ln\xi d\xi \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_1^{e^{\pi}} e^{-k^2 t}\frac{1}{\xi}\sin(k\ln\xi)\sin\ln\xi d\xi\right)\sin(k\ln x). \end{aligned}$$

Son eşitlikte parantez içinde olan ifade, $\{\sin k\ln x\}$ fonksiyonlar sistemi $[1, e^{\pi}]$ aralığında $\frac{1}{x}$ ağırlıklı ortogonal sistem oluşturduğundan, $k \neq 1$ için sıfıra, $k = 1$ için ise 1 e eşittir (Örnek 1.8). Böylece ele alınan problemin çözümü $u(t,x) = e^{-t}\sin\ln x$ olarak bulunur. Çözümün denklemi sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. ⊘

3.2. Euler Tipi Türdeş Olmayan Parabolik Denklem İçin Karışık Problemin Çözümü

Bu bölümde $D = \{0 < t < T < \infty, 1 < x < e^{\pi}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_t - a^2 x(xu_x)_x &= f(t,x), \qquad 0 < t < T < \infty, \;\; 1 < x < e^{\pi} && (3.21) \\ U(0,x) &= \varphi(x), \qquad 1 \leq x \leq e^{\pi} && (3.22) \\ u(t,1) &= u(t,e^{\pi}) = 0, \qquad t \geq 0 && (3.23) \end{aligned}$$

probleminin çözümünün varlığını, tekliğini ve diferansiyel özelliklerini inceleyeceğiz.

Probleminin çözümünü, (3.8) Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonları üzere değişken katsayılı

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(k \ln x) \tag{3.24}$$

trigonometrik serisi şeklinde arayalım. Burada $u_k(t)$, $(k = \overline{1,\infty})$ belirlenmesi gereken bilinmeyen değişken katsayılardır.
(3.24) eşitliğinde biçimsel olarak t ve x e göre türev alma yolu ile

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \sin(k \ln x) \\ u_x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x} u_k(t) \cos(k \ln x), \qquad & xu_x &= \sum_{k=1}^{\infty} k u_k(t) \cos(k \ln x) \\ (xu_x)_x &= -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(k \ln x), \qquad & x(xu_x)_x &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(k \ln x) \end{aligned}$$

bulup, u_t ve $x(xu_x)_x$ ifadelerini (3.21) de yerlerine yazalım.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \sin(k \ln x) + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(k \ln x) = f(t,x). \tag{3.25}$$

(3.25) eşitliğinin her iki tarafını $\frac{1}{x} \sin(n \ln x)$ ile çarpıp, $[1, e^{\pi}]$ aralığında x e göre integralini alırsak

$$u_k'(t) + a^2 k^2 u_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_1^{e^{\pi}} f(t,x) \frac{1}{x} \sin(k \ln x) dx \qquad (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.26}$$

sonsuz sayıda, benzer olmak üzere, teklenmiş denklemlerden oluşan birinci mertebeden diferenasiyel denklemler sistemini elde ederiz.

Burada, $\frac{2}{\pi}\int_1^{e^\pi} f(t,x)\frac{1}{x}\sin(k\ln x)dx$ integralinin, $f(t,x)$ fonksiyonunun t parametresine bağlı Fourier katsayıları olduğu açıktır.

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_1^{e^\pi} f(t,x)\frac{1}{x}\sin(k\ln x)dx \qquad (k=\overline{1,\infty}).$$

Bu nedenle (3.26) sistemi

$$u_k'(t) + a^2k^2u_k(t) = f_k(t), \qquad (k=\overline{1,\infty})$$

şeklinde de yazılabilir.

Görüldüğü gibi (3.26) sisteminin herbir denklemi, türdeş olmayan birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemdir (her somut k için) ve sabitin değiştirilmesi yöntemiyle çözülebilir. Bunu yapmak için, önce denklemin

$$u_k'(t) + a^2k^2u_k(t) = 0$$

olmak üzere türdeş kısmını çözelim.

$$\frac{du_k(t)}{u_k(t)} = -a^2k^2dt \Rightarrow \quad u_k^T(t) = C_ke^{-a^2k^2t}, \qquad (k=\overline{1,\infty})$$

Şimdi çözümdeki C_k sabitlerini t ye bağlı olarak düşünüp ($C_k = C_k(t)$), elde edilen

$$u_k(t) = C_k(t)e^{-a^2k^2t}, \qquad (k=\overline{1,\infty}) \tag{3.27}$$

fonksiyonlarındaki $C_k(t)$ leri, $u_k(t)$ lerin (3.26) denklemini sağlayacağı şekilde seçelim. Bunun için

$$u_k'(t) = C_k'(t)e^{-a^2k^2t} - a^2k^2C_k(t)e^{-a^2k^2t}$$

bulup, $u_k(t)$ ve $u_k'(t)$ lerin ifadelerini sözkonusu denklemde yerlerine yazıp gerekli işlemleri yapalım.

$$e^{-a^2k^2t}C_k'(t) - e^{-a^2k^2t}a^2k^2C_k(t) + e^{-a^2k^2t}a^2k^2C_k(t) = f_k(t),$$

$$\begin{aligned} C_k'(t) =& f_k(t)e^{a^2k^2t}, \\ dC_k(t) =& f_k(t)e^{a^2k^2t}dt. \end{aligned}$$

Her iki tarafın, $[0,t]$ aralığında integralini alırsak

$$C_k(t) = \int_0^t f_k(\tau)e^{a^2k^2\tau}d\tau + C_k^0 \tag{3.28}$$

olur. Burada $C_k(0) = C_k^0$ kabul edilmiştir.

(3.28) ifadesini (3.27) eşitliğinde dikkate alırsak

$$u_k(t) = \left[\int_0^t f_k(\tau) e^{a^2k^2\tau} d\tau + C_k^0\right] e^{-a^2k^2t} \tag{3.29}$$

olur. Öte yandan, (3.22) koşulu (3.24) te dikkate alındığında, $u_k(0) = \varphi_k, \quad (k = \overline{1,\infty})$ elde edilir. Bunu (3.29) da dikkate aldığımızda $C_k^0 = \varphi_k, \quad (k = \overline{1,\infty})$ olur. Yani

$$u_k(t) = \left[\int_0^t f_k(\tau) e^{a^2k^2\tau} d\tau + \varphi_k\right] e^{-a^2k^2t}$$

veya

$$u_k(t) = \int_0^t f_k(\tau) e^{-a^2k^2(t-\tau)} d\tau + \varphi_k e^{-a^2k^2t}, \quad (k = \overline{1,\infty}) \tag{3.30}$$

bulunur. $u_k(t)$ leri (3.24) te yerlerine yazarsak aranan çözümü biçimsel olarak

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2k^2t} \sin(k \ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_k(\tau) e^{-a^2k^2(t-\tau)} d\tau \sin(k \ln x)\right) \tag{3.31}$$

şeklinde buluruz.

(3.31) formülünü aşağıdaki gibi dönüştürelim.

$$\begin{aligned}
u(t,x) = & \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2k^2t} \int_1^{e^\pi} \varphi(\xi) \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) d\xi \sin(k \ln x) + \\
& \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \int_1^{e^\pi} f(\tau,\xi) \frac{1}{\xi} e^{-a^2k^2(t-\tau)} \sin(k \ln \xi) d\xi d\tau\right) \sin(k \ln x) \Rightarrow \\
u(t,x) = & \int_1^{e^\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2k^2t} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x) \varphi(\xi) d\xi + \\
& \int_0^t \int_1^{e^\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2k^2(t-\tau)} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x)\right) f(\tau,\xi) d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Son eşitlikte

$$G(t,\xi,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2k^2t} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x)$$

ve

$$G(t-\tau,\xi,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2k^2(t-\tau)} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x)$$

denirse

$$u(t,x) = \int_1^{e^\pi} G(t,\xi,x) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_1^{e^\pi} G(t-\tau,\xi,x) f(\tau,\xi) d\xi d\tau \tag{3.32}$$

elde edilir.

Böylece (3.21)-(3.23) problemi ile ilgili aşağıdaki teoremin doğruluğu söylenebilir.

Teorem 3.3. $\varphi(x)$, $[1, e^{\pi}]$ aralığında sürekli, parçalı türetilebilir olup, $\varphi(1) = \varphi(e^{\pi}) = 0$ uyum koşullarını, $f(t,x)$ ise $[0,T] \times [1,e^{\pi}]$ bölgesinde sürekli, her $t \in [0,T]$ için x e göre parçalı türetilebilir ise (3.21)-(3.23) probleminin tek çözümü var ve (3.32) formülü ile belirlenir.

Örnek 3.4.

$$\begin{aligned} u_t - x(xu_x)_x &= t \sin \ln x \\ u(0,x) &= \sin \ln x, \qquad 1 \le x \le e^{\pi} \\ u(t,1) &= u(t,e^{\pi}) = 0, \qquad t \ge 0 \end{aligned}$$

problemini çözünüz.

○ Verilerin, Teorem (3.1) in koşullarını sağladığı açıktır. Basitlik için problemi (3.32) formülü yardımıyla çözelim. Türdeş kısmı Örnek (3.2) de çözmüş ve $e^{-t} \sin \ln x$ olarak bulmuştuk. Şimdi $f(t,x) = t \sin \ln x$ olduğunu göz önünde bulundurarak, $G(t-\tau, \xi, x)$ kaynak fonksiyonunun yardımıyla (3.32) formülündeki ikinci integrali hesaplayalım.

$$\int_0^t \int_1^{e^{\pi}} G(t-\tau,\xi,x) f(\tau,\xi) d\xi d\tau =$$

$$\int_0^t \int_1^{e^{\pi}} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2(t-\tau)} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x) \right) \tau \sin \ln x d\xi d\tau =$$

$$\int_0^t \tau \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_1^{e^{\pi}} \sin(k \ln \xi) \sin \ln \xi \frac{1}{\xi} d\xi \right) e^{-k^2(t-\tau)} \sin(k \ln x) d\tau$$

Eşitliğin son tarafındaki parantez içinde olan ifade, $\{\sin k \ln x\}$ fonksiyonlar sistemi $[1, e^{\pi}]$ aralığında $\frac{1}{x}$ ağırlıklı ortogonal sistem oluşturduğundan, $k \neq 1$ için sıfıra, $k = 1$ için ise 1 e eşittir (Örnek 1.8). Yani

$$\int_0^t \int_1^{e^{\pi}} G(t-\tau,\xi,x) f(\tau,\xi) d\xi d\tau = \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)} \sin \ln x d\tau$$

olur. Burada $\int_0^t \tau e^{-(t-\tau)} d\tau = (e^{-t} + t - 1)$ olduğunu dikkate alırsak aranan çözümü

$$u(t,x) = (2e^{-t} + t - 1) \sin \ln x$$

olarak buluruz.

Şimdi açıklık için bulunan çözümün problemi sağladığını gösterelim: $u(0,x) = \sin \ln x$ olduğu çözümden açıktır. Yani başlangıç koşulu sağlanır. $u(t,1) = u(t,e^{\pi}) = 0$ olduğu da çözümün şeklinden görülmektedir. Yani sınır koşulları da sağlanır. Çözümün

$$\begin{aligned}
u_t &= (-2e^{-t}+1)\sin\ln x \\
u_x &= (2e^{-t}+t-1)\frac{1}{x}\cos\ln x, & xu_x &= (2e^{-t}+t-1)\cos\ln x \\
(xu_x)_x &= -(2e^{-t}+t-1)\frac{1}{x}\sin\ln x, & x(xu_x)_x &= -(2e^{-t}+t-1)\sin\ln x,
\end{aligned}$$

türevlerini yazıp buradan da

$$u_t - x(xu_x)_x = (-2e^{-t}+1+2e^{-t}+t-1)\sin\ln x = t\sin\ln x$$

yani $u_t - x(xu_x)_x = t\sin\ln x$ olduğunu buluruz. Demek ki bulunan $u(t,x)$ çözümü, ele alınan problemin tek çözümüdür. $\oslash$

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

$\varphi(x)$ fonksiyonu $[1, e^{\pi}]$ aralığında sürekli olup, parçalı türetilebilir ve $\varphi(1) = \varphi(e^{\pi}) = 0$ uyum koşullarını sağladığında türdeş (3.1)-(3.3) probleminin tek çözümü var ve (3.20) eşitliği ile belirlenir. Bu problem için kaynak fonksiyon

$$G(t, \xi, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 k^2 t} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x)$$

eşitliği ile verilir.

$\varphi(x)$, $[1, e^{\pi}]$ aralığında sürekli, parçalı türetilebilir olup, $\varphi(1) = \varphi(e^{\pi}) = 0$ uyum koşullarını, $f(t, x)$ ise $[0, T] \times [1, e^{\pi}]$ bölgesinde sürekli, her $t \in [0, T]$ için x e göre parçalı türetilebilir ise türdeş olmayan (3.21)-(3.23) probleminin tek çözümü var ve (3.32) formülü ile belirlenir. Bu problem için kaynak fonksiyon

$$G(t - \tau, \xi, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 k^2 (t-\tau)} \frac{1}{\xi} \sin(k \ln \xi) \sin(k \ln x)$$

eşitliği ile verilir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada değişken katsayılı bir sınıf parabolik denklem için karışık problemin Fourier yöntemi ile çözümü bulunmuştur. Çalışmada sınır koşulları türdeş olarak kabul edilmiştir. Bu çalışmaya dayanarak sınır koşulları türdeş olmayan problem için de problemin çözümü bulunur, gerek türdeş gerek türdeş olmayan denklem, her iki problem içinde kaynak fonksiyonunun şekli belirlenebilir. Ayrıca yarı doğrusal denklem için de benzer sınır koşulları dahilinde problemin çözümü bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

Al-Gwaiz, M., 2008. Sturm Liouville Theory and Its Applications. Springer, 46th ed., ISBN:978-1-84628-971-2, 264 s.

Allan, K., 2002. Hilbert Spaces, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials. Birkhäuser, 1st ed., ISBN: 3-7643-6701-6, 352 s.

Asmar, N., 2004. Fourier Series. 77-102. ed: Sally Yagan, Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. Pearson, 2nd ed., ISBN: 0-13-148096-0, 805 s.

Brown, J., Churchill, R., 1993. Fourier Series and Boundary Value Problems. McGraw-Hill, 5th ed., ISBN: 0-07-008202-2, 348 s.

Can, M., 2004. Yüksek Matematik. 1. baskı, ISBN: 978-0486445489, 801 s.

Clarke, B., 2004. Fourier Series. 9-25. Fourier Theory. Macquarie University, 65 s.

Courant, R., Hilbert, D., 1931. Methods of Mathematical Physics. Verlog Von Julius Springer, vol. 1, ISBN: 0 470 17952 X, 548 s.

Çağlıyan, M., Çelebi, O., 2010. Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dora Yayıncılık, 5. baskı, ISBN: 978-605-4118-75-5, 396 s.

Çiftçi, İ. 2007. Değişken Katsayılı Fourier Serileriyle Parabolik Denklemler için Devirli Sınır Koşullu Karışık Problemin Analizi. Doktora Tezi. Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, Türkiye, 101 s.

Elias, S., Rami, S., 2002. Fourier Analysis an Introduction. Princeton University Press, ISBN: 978-0-691-11384-5, 309 s.

Enrique, G., Velasco, 1996. Fourier Analysis and Bounday Value Problems. Elsevier, 1st ed., ISBN: 0122896408, 551 s.

Haberman, R., 2005. Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Bounday Value Problems, Pearson, 5th ed., ISBN: 9780321797056, 769 s.

Hanna, J., Rowland, J., 1990. The Sturm Liouville Boundary Value Problem. 50-58. Fourier Series, Transforms and Boundary Value Problems. Wiley, 2nd ed., ISBN: 0-471-61983-3, 354 s.

Halilov, H., 2006. Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Temel Elemanları. Literatür Yayıncılık, 2. baskı, ISBN: 975-8431-98-6, 448 s.

Halilov, H., Hacısalihoğlu, H., 2009. Yüksek Matematik Kılavuzu 1. Efil Yayınevi, 1. baskı, ISBN: 9786054160037, 572 s.

Myint, D., Debnath, L., 2007. Linear Partial Differential Equations. Birkhäuser, 4th ed., ISBN: 978-0-8176-4393-5, 700 s.

Öztürk, E., 2012. Fourier Serileri. 385-406. Fizik ve Matematikte Matematik Yöntemler. Cumhuriyet Üniversitesi, 2. baskı, ISBN: 978-975-02-2006-7, 560 s.

Pinsky, M., 2011. Fourier Series and Sturm Liouville Eigenvalue Problem. 35-97. Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications. American Mathematical Society, 3th ed., ISBN: 978-0-8218-6889-8, 526 s.

Ravi, A., O'Regan, D., 2009. Ordinary and Partial Differenatial Equations. Springer, 2009 ed., ISBN: 978-0-387-79145-6, 410 s.

Shempley, R., 1984. Differential Equations. Wiley, 2nd ed., ISBN: 0-471-81450-4, 807 s.

Soykan, Y., 2008. Lebesgue İntegrali.50-51. Fonksiyonel Analiz. Nobel Yayın Dağıtım, 1. baskı, ISBN: 978-605-395-125-4, 504 s.

Strauss, W., 2008. Fourier Series. 104-136. Partial Differential Equations an Introduction. Wiley, 2nd ed., ISBN: 978-0470-05456-7, 454 s.

Tikhonov, Andrei, N., 1967. Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Holden Day, ISBN: 0-486-66422-8, 754 s.

Vretblad, A., 2003. L^2 Theory. 105-122. Fourier Analysis and Its Applications. Springer, 1st ed., ISBN: 0-387-00836-5, 269 s.

ÖZGEÇMİŞ

Tamer KÖZLEME, 01.04.1989 tarihinde Giresun- Alucra'da doğdu. İlköğretimini Alucra ilçesinde tamamladıktan sonra ortaokul ve lise eğitimini Ordu ilinde tamamladı. Ordu Lisesinden 2006 yılında mezun oldu. 2007 yılında Rize Üniversitesi F.E.F Matematik Bölümünü kazandı ve 2011 yılında bölüm ikincisi olarak mezun olduktan sonra özel bir deshanede Matematik Öğretmenliği yapmaya başladı. 2012 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans programına başladı. Halen özel bir kurumda Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.