T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇGENSEL NORMLAR VE KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

EMRE ALTAY

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET AKİF İNCE
TEZ JÜRİLERİ
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT DENİZ
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT ERTUĞRUL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2019

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇGENSEL NORMLAR VE KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE danışmanlığında, Emre ALTAY tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 22/01/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvan Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL	

T.C. RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışma, keyfi bir sınırlı kafes üzerine tanımlanan t-kapanış operatörlerini incelemek amacı ile Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE' ye, teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli ailem Fatma-Sabri ALTAY'a ve eşim Şeyma ALTAY'a tüm kalbimle teşekkür ediyorum.

Emre ALTAY

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Üçgensel Normlar ve Kapanış Operatörleri" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 22/01/2019

Emre ALTAY

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

ÜÇGENSEL NORMLAR VE KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

Emre ALTAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE

Bu çalışmada, keyfi bir sınırlı kafes üzerinde $t-$normların varlığı bilgisine dayanarak, kafes üzerindeki bir $t-$norm ve kafesin üst elemanını içeren bir alt kümesinin yardımıyla $t-$kapanış operatörleri tanımlanır. $t-$kapanış operatörlerini kullanarak iki denklik bağıntısı tanımlanır. İlki bir sınırlı kafes üzerindeki tüm $t-$normların kümesi üzerindedir. Bu bağıntıya göre önemli bir sınıf elde edilir. İkinci olarak verilen tüm denklik bağıntılarının kümesi üzerinde bir kısmi sıra tanımlanır. Son olarak L^* ile ifade edilen bir küme tanımlanır ve bu kümeyi kullanarak, L'nin hangi koşullar altında $L_{C_{A,T}}$'ye gömülebileceği araştırılır.

2019, 32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kapanış Operatörü, Üçgensel Norm, Sınırlı Kafes.

ABSTRACT

TRIANGULAR NORMS AND CLOSURE OPERATORS

Emre ALTAY

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. M. Akif İNCE

In this study, based on the knowledge of the existence of $t-$norms on an arbitrary given bounded lattice, we introduce $t-$closure operators with the help of a $t-$norm on the lattice and a subset of the lattice including the top element. We define two equivalence relations by using $t-$closure operators. The first one is on the set of all $t-$norms on a bounded lattice. An important class is obtained according to this relation. We define a partially order on the set of all equivalent relations given as secondly. Lastly, we define a set, denoted by L^*, and by using this set, we investigate under which conditions L can be embedded into $L_{C_{A,T}}$.

2019, 32 pages

Keywords: Closure Operator, Triangular Norm, Bounded Lattice.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\wedge$	Kafeste İnfimum
$\vee$	Kafeste Supremum
$\subseteq$	Kümeler Arasındaki Alt Küme Bağıntısı
$\subsetneq$	Kümeler Arasındaki Özalt Küme Bağıntısı
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman Değil
$\neq$	Eşit Değil
$\nleq$	Küçük Eşit Değil
$\ngeq$	Büyük Eşit Değil
$\geq$	Büyük veya Eşit
$\leq$	Küçük veya Eşit
$\cap$	Arakesit İşlemi
$\cup$	Birleşim İşlemi
$t-$norm	Üçgensel Norm
$[a,b]$	Kapalı Aralık
$]a,b[$	Açık Aralık
L	Kafes
x'	x'in Komplimenti
Sup$X$	X'in Üst Sınırlarının En Küçüğü
İnf$X$	X'in Alt Sınırlarının En Büyüğü
$\sim_A$	Denklik Bağıntısı
$\wp(L)$	Kuvvet Kümesi
$C_{A,T}$	T - kapanış operatörü
$A.T.$	Aksi Taktirde
L^*	$\{C_{A,T}(\{x\}) \mid x \in L\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kapanış operatörleri matematiğin pek çok alanını etkilemiştir ve çok çeşitli yapılarda incelenmiştir (kafesler üzerinde, topolojik uzaylar üzerinde, bulanık kümeler üzerinde, graflar üzerinde, kategorileri içerisinde vs.). Bu anlamda, kapanış operatörleri sadece teorik anlamda çalışılan soyut bir kavram değil, aynı zamanda çeşitli alanlarda, çok sayıda uygulaması olan önemli dönüşümlerdir (Even ve Gran, 2016; Pang, 2018; Slapal, 2017).

Schweizer ve Sklar üçgensel normları (veya kısaca t −normları) olasılıksal metrik uzaylar çerçevesinde ortaya koymuştur (Schweizer, 1983) ve tanımları, Menger tarafından metrik uzayların tanımlarındaki üçgen eşitsizliğini olasılıksal metrik uzaylara doğru genişletmek amacıyla kullanılan bir fikre dayanır. Devam eden süreçte, t −normların çok değerli mantıklardaki kesişimin yorumlamaları oldukları ortaya konmuştur ve $[0,1]$ birim reel aralığında tanımlanan t −normlarla ilgili birçok çalışma yayınlanmıştır (De Beats, 1999; Karaçal, 2005). Daha sonra, bulanık kümeler ve bulanık mantıklar çerçevesinde, birim reel aralığın yerini daha genel bir yapı olan sınırlı kafesler almıştır (De Beats, 1999; Karaçal, 2005).

Bu çalışmada, keyfi bir sınırlı kafes üzerinde t −normların varlığı kullanılarak, L sınırlı kafesi üzerindeki bazı kapanış operatörleri araştırılmış, ki bunlar da L üzerinde bir t −norm T ve kafesin en büyük elemanını içeren bir $A \subseteq L$ alt kümesi yardımıyla inşa edilmiştir. Bu kapanış operatörlerine ($C_{A,T}$ ile ifade edilir) "t −kapanış operatörleri" denir. Çalışma şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2.1'de, t −kapanış operatörleri tanıtılmış ve bazı özellikleri araştırılırmıştır. Bazı önemli t −kapanış operatörlerine göre ($C_{A,T_\wedge}$ ve C_{A,T_W}), L'nin kapalı alt kümeleri belirlenmiştir. Bölüm 2.2'de, t −kapanış operatörleri kullanarak L sınırlı kafesi üzerindeki t −normlar sınıfı üzerinde, $\sim_A$ denklik bağıntısı tanımlanmış ve iki sürekli t −normun $\sim_A$ denklik bağıntısına göre $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde denk olduğu kanıtlanmıştır. Bölüm 2.3'de, t −kapanış operatörleri yardımıyla elde edilen ve $\Theta_{A_i,T}$ ile gösterilen bir diğer denklik bağıntısı tanımlanmış; $Eq_T\wp(L) = \{ \Theta_{A_i,T} | A_i \subseteq L,\ 1 \in A_i$ ve $T(A_i, A_i) \subseteq A_i\}$ (T, L üzerindeki keyfi ama sabit bir t −normdur). Ek olarak, $Eq_T\wp(L)$

üzerinde bir kısmi sıralama tanıtılmıştır. Bölüm 2.4'de, L^* ile ifade edilen ve $C_{A,T}(\{x\})(x \in L)$ alt kümelerini içeren bir küme tanımlanmıştır. L üzerinde tanımlanan T'nin sürekli olması durumunda $L = [0,1]$'in, $L_{C_{[0,1],T}}$ içine gömülebileceği gösterilirmiştir.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler

Bu bölümün hazırlanmasında Birkhoff G, 1976 kaynağından faydalanılmıştır.

1.2.1. Tanım P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1: $x \leq x$ (Yansıma)
P2: $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)
P3: $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) bağıntısı denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. $x \leq y$ bağıntısı $y \geq x$ olarak da yazılır ve 'y, x de içerilir' olarak ifade edilir. Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ olarak da yazılır.

1.2.1. Uyarı $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böylece bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P'nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa 1 ile gösterilir ve P' nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu açıktır.

Eğer 0 ve 1 elemanları mevcutsa, her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1'e evrensel sınırlar denir.

1.2.2. Tanım $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine tam sıralı küme veya zincir denir.

1.2.3. Tanım $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: P \to Q$ dönüşümüne sıra korur dönüşüm veya izoton denir: $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in P$ için;

$$x \leq_1 y \text{ ise } \theta(x) \leq_2 \theta(y).$$

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir: $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in P$ için;

$$\theta(x) \leq_2 \theta(y) \Leftrightarrow x \leq_1 y$$

sağlayacak şekilde birebir ve örten bir $\theta: P \to Q$ dönüşümü mevcuttur. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorf ise bu durum $P \cong Q$ ile gösterilir.

$(P, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfiye bir otomorfi denir.

1.2.4. Tanım $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmi sıralı küme olsun. Bir $\theta: P \to Q$ fonksiyonuna ters sıra korur veya antiton denir:$\Leftrightarrow$ $x, y \in P$ için,

$$[x \leq_1 y \text{ ise } \theta(y) \leq_2 \theta(x)] \text{ ve } [\theta(x) \leq_2 \theta(y) \text{ ise } y \leq_1 x]$$

gerektirmeleri sağlanır. θ antiton, $1-1$ ve örten bir dönüşüm ise θ dönüşümüne dual izomorfi denir.

1.2.5. Tanım $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme, $X \subseteq P$ ve $a \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $a \leq x$ ise a elemanına X kümesnin en küçük elemanıdır denir ve $ekeX$ ile gösterilir. X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve $ebeX$ ile gösterilir.

$a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir. X kümesinde maksimal eleman dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

1.2.6. Tanım $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

i) $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir. X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\bar{X}$ ile gösterilir. X in her bir c üst sınırı için $a \leq c$ ise, a elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $a = supX$ veya $a = \bigvee X$ ile gösterilir.

ii) $b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir. X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. X'in her bir d alt sınırı için $d \leq b$ ise, b elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $b = infX$ veya $b = \bigwedge X$ ile gösterilir.

1.3. Kafesler

Bu bölümün hazırlanmasında Birkhoff G, 1976 kaynağından faydalanılmıştır.

1.3.1. Tanım $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $x, y \in P$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcut ise P ye kafes denir.

P kafesinde $x, y \in P$ için $x \vee y := sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x, y\}$ ile gösterilir.
Eğer $(P, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri P üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(P, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

1.3.2. Tanım Bir L kafesine tam kafes denir: $\Leftrightarrow$ L nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir, yani her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$, L de mevcuttur.

Özel olarak 1.1.3.Tanım'da $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

1.3.3. Tanım L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Boş küme ve bir elemanlı, alt kümeleri bir kafesin alt kafesleridir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $[a, b] := \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

1.3.4. Tanım $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin $P \times Q = \{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$ şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi her $x_1, x_2 \in P$ ve $y_1, y_2 \in Q$ için,

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \, ve \, y_1 \leq_2 y_2$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

1.3.1. Teorem L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir.

Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için;

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \text{ dır.}$$

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

1.3.1. Lemma P bir kısmen sıralı küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) her $x, y, z \in P$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1: $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$ (İdempotent)

L2: $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$ (Komütatif)

L3: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)

L4: $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$ (Yok etme)

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

1.3.2. Lemma P, 0 en küçük elemanına sahip bir kısmen sıralı küme ise her $x \in P$ için $0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$ dir.

Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için $x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$ dir.

1.3.3. Lemma Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sırayı korur, yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$ sağlanır.

1.3.4. Lemma L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

1.3.5. Lemma L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen $x \leq z \; ise \; x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ eşitsizliği sağlanır.

1.3.2. Teorem $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir $\Leftrightarrow$ $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri $L1 - L4$ özelliklerini sağlar.

1.3.3. Teorem Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

$\boldsymbol{L5'}. x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \; \forall x, y, z \in L,$
$\boldsymbol{L5''}. x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \; \forall x, y, z \in L$

1.3.5. Tanım Bir kafese dağılmalı kafes denir: $\Leftrightarrow$ $L5^{'}$ özelliği (denk olarak $L5^{''}$) sağlanır.

1.3.6. Tanım L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

$\boldsymbol{L6}. x \leq z \; ise \; x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ sağlanır.

1.3.7. Tanım L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir: $\Leftrightarrow x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi $y = x'$ ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

1.3.8. Tanım $x \in L$ elemanına bir atom denir $:\Leftrightarrow$ $x,$ $L\backslash\{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıdır.

$(L, \leq, 0{,}1)$ sınırlı kafes ve $a, b \in L$ olsun, eğer a ve b kıyaslanamaz ise $a \parallel b$ notasyonu ile gösterilir.

1.3.9. Tanım $x \in L$ elemanına bir koatom denir $:\Leftrightarrow$ $x,$ $L\backslash\{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıdır.

1.3.10. Tanım L sınırlı kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir: $\Leftrightarrow$ L dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

1.3.4. Teorem L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$ için

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1,$
L8. $(x')' = x,$

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

1.3.11. Tanım (Burris vd.,1981) Bir L_1 kafesi, L_2 kafesi içine gömülebilirdir denir: $\Leftrightarrow$ L_2'nin, L_1'e izomorf bir alt kafesi mevcuttur. Bu durumda L_2, L_1'in bir kopyasını alt kafes olarak içerir de denilebilir.

1.3.12. Tanım (Birkhoff G.,1976) Bir L cebirsel sistemi üzerindeki bir kongrüans bağıntısı, L üzerinde onun ikili işlemi için yerine koyma özelliğini sağlayan bir θ denklik bağıntısıdır. Eğer L bir $\vee -$yarı kafes ise bu şu anlama gelir:

$$(a,b) \in \theta \text{ ise her } x \in L \text{ için } (a \vee x, b \vee x) \in \theta.$$

Bir kafeste, bu koşulun duali de doğrudur.

1.4. Üçgensel Normlar

Bu bölümün hazırlanmasında Klement E. vd., 2000 kaynağından faydalanılmıştır.

1.4.1. Tanım L sınırlı kafes olsun. $T: L^2 \to L$ fonksiyonuna bir üçgensel norm (kısaca t-norm) denir :⇔

T1: $Her\ x,y,z \in L,\ T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z).$ (birleşme)

T2: $Her\ x,y \in L,\ T(x,y) = T(y,x);$ (değişme)

T3: $Her\ x,y,z \in L,\ x \leq y \implies T(x,z) \leq T(y,z);$ (monotonluk)

T4: $Her\ x \in L,\ T(x,1) = x.$ (nötral eleman)

1.4.1. Örnek $[0,1]$ birim reel aralık üzerindeki bazı özel $t -$normlar;

- $T_M(x,y) = min(x,y)$
- $T_P(x,y) = x.y$
- $T_L(x,y) = max(x+y-1,0)$
- $T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [0,1[^2 \\ \min(x,y) & A.T \end{cases}$

1.4.1. Önerme $[0,1]$ birim reel aralık üzerindeki T_M, T_P, T_L, T_D $t -$normların sıralanışı aşağıdaki gibidir:

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

1.4.2. Örnek T_M ve T_D $t -$normları herhangi bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde sırasıyla aşağıdaki şekilde değişir:

$T_\wedge, T_W: L^2 \to L$ olmak üzere;

$T_{\wedge}(x,y) = x \wedge y$

$$T_w(x,y) = \begin{cases} y, & x = 1 \\ x, & y = 1 \\ 0, & A.T. \end{cases} \quad \text{dır.}$$

1.4.3. Örnek Aşağıda verilen $T_1, T_2 \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonları birer t −normdur:

$$T_1(x,y) = \begin{cases} 0 & min(x,y) \leq \frac{1}{2} \quad ve \quad x,y \neq 1 \\ min(x,y) & A.T. \end{cases}$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \leq \frac{1}{2} \quad ve \quad x,y \neq 1 \\ xy & A.T. \end{cases}$$

1.4.2. Tanım Bir $F \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu süreklidir. $:\Leftrightarrow$ Her yakınsak $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için $F\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$ dir.

1.4.2. Önerme T_M, T_P, T_L temel t −normları sürekli ancak T_D süreksizdir.

1.4.4. Örnek 1.4.3 Örnekte verilen T_1 ve T_2 t −normları sürekli değildir.
Gerçekten,

$(x_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right)$, $(y_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için;

$$\lim_{n\to\infty} T_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \min\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Öte yandan, $T_1\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = T_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$ dır. Böylece T_1 t −normu sürekli olamaz.

$(a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n+2}\right)$, $(b_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n+2}\right) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için;

$$\lim_{n\to\infty} T_2(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n+2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Öte yandan, $T_2\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right) = T_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ olup T_2 t- normu sürekli değildir.

1.4.3. Tanım L bir sınırlı kafes olsun. $S \colon L^2 \to L$ fonksiyonuna bir üçgensel conorm (kısaca t -conorm) denir : $\Leftrightarrow$

S1: $Her\ x,y,z \in L, S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$ (birleşme)

S2: $Her\ x,y \in L, S(x,y) = S(y,x)$ (değişme)

S3: $Her\ x,y,z \in L, y \leq z \Longrightarrow S(x,y) \leq S(x,z)$ (monotonluk)

S4: $Her\ x \in L,\ S(x,0) = x$ (nötral eleman)

1.4.5. Örnek $[0,1]$ birim reel aralık üzerindeki bazı özel t −conormlar;

- $S_M(x,y) = max(x,y)$
- $S_P(x,y) = x + y - xy$
- $S_L(x,y) = min(x + y, 1)$
- $S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ (x,y) \in]0,1[^2 \\ \max(x,y) & , \ A.T \end{cases}$

1.4.6. Örnek S_M ve S_D t-normları herhangi bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde sırasıyla aşağıdaki şekilde değişir:

$S_\vee, S_w: L^2 \to L$ olmak üzere;

$S_\vee(x,y) = x \vee y$

$S_w(x,y) = \begin{cases} y, & x = 0 \\ x, & y = 0 \\ 1, & A.T. \end{cases}$ dır.

1.4.4. Tanım Bir L sınırlı kafesi üzerindeki T, t −normuna bölünebilirdir denir :⇔ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için, öyle ki $x = T(y,z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ vardır.

1.5. Kapanış Operatörleri

Bu bölümün hazırlanmasında Burris vd., 1981 isimli kaynaktan faydalanılmıştır.

1.5.1. Tanım L herhangi bir küme olsun. $C: \wp(L) \to \wp(L)$ dönüşümüne bir kapanış operatörü denir: ⇔ Her $X, Y \subseteq L$ için,

C1: $X \subseteq C(X)$ (kapsama)

C2: $C(C(X)) = C(X)$ (idempotent)

C3: $X \subseteq Y$ şunu belirtir $C(X) \subseteq C(Y)$ (izoton)

Burada, $\wp(L)$, L'nin tüm alt kümelerinin kümesini ifade eder.

1.5.2. Tanım L'nin X alt kümesine(C'ye göre) kapalı denir: $\Leftrightarrow$ $C(X) = X$. L'nin tüm kapalı alt kümlerinin kümesi kapsama bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir. Bu kısmen sıralı küme L_C ile gösterilir.

1.5.1. Teorem C, A kümesi üzerindeki bir kapanış operatörü olsun. Bu durumda L_C aşağıdaki infimum ve supremum ile bir tam kafestir:

$$\bigwedge_{i\in I} C(A_i) = \bigcap_{i\in I} C(A_i)$$

ve

$$\bigvee_{i\in I} C(A_i) = C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

1.5.3. Tanım L kümesi üzerindeki bir C kapanış operatörüne bir cebirsel kapanış operatörü denir: $\Leftrightarrow$

C4: Her $X \subseteq L$ için $C(X) = \bigcup\{C(Y): Y \subseteq X \; ve \; Y \; sonlu\}$.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümün hazırlanmasında İnce vd., 2019 isimli kaynaktan faydalanılmıştır.

2.1. Sınırlı Kafesler ve $[0,1]$ Birim Reel Aralık Üzerindeki T −kapanış Operatörleri

2.1.1. Teorem $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes, $A \subseteq L$, $1 \in A$ ve T, L üzerinde bir t −norm olsun, öyle ki her $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$. Bu taktirde, $C_{A,T}: \wp(L) \to \wp(L)$

$$C_{A,T}(X) = T(X, A)$$

fonksiyonu; L üzerinde bir kapanış operatörüdür.

İspat: $X \in \wp(L)$ olsun. Her $x \in X$ için, T'nin L üzerinde bir t −norm ve $1 \in A$ oluşu kullanılırsa;

$$x = T(x, 1) \in T(X, A) = C_{A,T}(X).$$

Yani $X \subseteq C_{A,T}(X)$ ve **C1** sağlanır. **C2**'yi kanıtlamadan önce, ihtiyaç olan bir başka eşitlik gösterilsin. Herhangi bir $a \in A$ için, $a = T(a, 1) \in T(A, A)$ olduğundan dolayı, $A \subseteq T(A, A)$ elde edilir. Tersine, $T(A, A) \subseteq A$ dır, çünkü hipoteze göre her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{A}$ dır. Bu yüzden, $\mathrm{T}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \mathrm{A}$ sonucu elde edilir. Eğer bu eşitlik ve t −normların birleşmeliliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} C_{A,T}(C_{A,T}(X)) &= C_{A,T}(T(X, A)) = T(T(X, A), A) = T(X, T(A, A)) = T(X, A) \\ &= C_{A,T}(X) \end{aligned}$$

Eşitliği elde edilir. **C3** için, $X, Y \in \wp(L)$ ve $X \subseteq Y$ olsun. Buradan, her $T(x, a) \in T(X, A)$ için, $T(x, a) \in T(Y, A)$ olur.
Bu durumda,

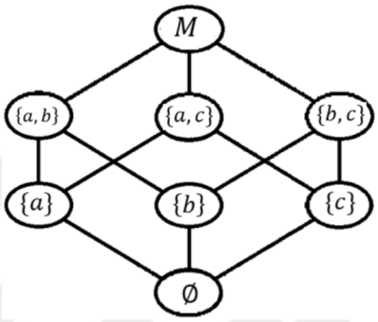
$$C_{A,T}(X) = T(X, A) \subseteq T(Y, A) = C_{A,T}(Y).$$

Yani, **C3** de sağlanır.

Böylece, $C_{A,T}$'nin L üzerinde bir kapanış operatörü olduğu gösterilmiş olur.

2.1.1. Uyarı Not edilmelidir ki, $C_{A,T}$'nin bir kapanış operatörü olması için, 2.1.1.Teorem'de A, L'nin alt kafesi olmak zorunda değildir. Bunu görmek için, aşağıdaki örnek incelensin.

2.1.1. Örnek Aşağıda diyagramı verilen, üç elemanlı bir $M = \{a, b, c\}$ kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi olan $L = (\wp(M), \subseteq, \emptyset, M, \cap, \cup)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 1

$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$ ve $T = T_\wedge$ olsun. Yani, $X \in \wp(L)$ için, $C_{A,T}(X) = T_\wedge(X, A)$'dir. Her $x, y \in A$ için $1 \in A$ ve $T_\wedge(x, y) \in A$ olduğundan dolayı, $C_{A,T}$'nin L üzerinde bir kapanış operatörü olduğu açıktır. Ama A, L'nin alt kafesi değildir çünkü $\{a\}, \{b\} \in A$ fakat $\{a\} \cup \{b\} \notin A$.

2.1.2. Uyarı 2.1.1.Teorem'e dönülürse, her $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olması koşulu genel olarak ihmal edilemez. Eğer bu durum göz ardı edilirse, **C2** sağlanamayabilir. Aşağıdaki örnek incelensin:

2.1.2. Örnek $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık göz önüne alınsın. L üzerinde $T = T_p$ ve $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olsun. $X = \left\{\frac{2}{5}\right\} \in \wp(L)$ için şu elde edilir:

$$C_{A,T_p}(X) = T_p(X, A) = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right].$$

O halde,

$$C_{A,T_p}(C_{A,T_p}(X)) = C_{A,T_p}\left(\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right]\right) = \left[\frac{1}{10},\frac{2}{5}\right]$$

Bu yüzden **C2** sağlanmaz. Böylece C_{A,T_p} bir kapanış operatörü değildir. Ek olarak $\frac{1}{2},\frac{2}{3} \in A$ elemanları için, $T_p\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \notin A$ olduğuna dikkat edilmelidir.

2.1.1. Tanım 2.1.1.Teorem'de verilen $C_{A,T}$ kapanış operatörüne L üzerinde, A ve T tarafından belirlenen t −kapanış operatörü adı verilir. Bu çalışma boyunca, kolaylık olması açısından t −kapanış operatörü olarak ifade edilecektir.

L sınırlı kafesi üzerindeki herhangi bir t −kapanış operatörü için, $\emptyset \in \wp(L)$ elemanı söz konusu olduğunda $C_{A,T}(\emptyset) = \emptyset$ olur, ki bu da bariz bir sonuçtur. Dolayısı ile bu çalışmada, L'nin boş olmayan alt kümeleri üzerinde çalışılacaktır.

2.1.3. Uyarı Bir sınırlı L kafesi üzerinde $C_{A,T}$ kapanış operatörü göz önüne alınırsa, herhangi bir $X \in \wp(L)$ için;

$$C_{A,T}(X) = \bigcup_{x \in X} C_{A,T}(\{x\}),$$

olur. Bu yüzden, bir L sınırlı kafesi üzerinde (A ve T'nin yardımıyla) tanımlanan tüm t −kapanış operatörleri cebirseldir. Bu sebeple, bu çalışmada çoğunlukla $C_{A,T}(X)$ yerine $C_{A,T}(\{x\})$ $(x \in X)$ kümeleri üzerinde çalışılacaktır.

2.1.1. Önerme $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes ve $C_{A,T}$ L üzerinde bir t −kapanış operatörü olsun. Bu taktirde, $L_{C_{A,T}}$, T ikili işlemi altında kapalıdır, yani her $X, Y \in L_{C_{A,T}}$ için $T(X,Y) \in L_{C_{A,T}}$.

İspat: $X, Y \in L_{C_{A,T}}$ olsun. T'nin birleşmeliliği kullanılarak,

$$C_{A,T}\big(T(X,Y)\big) = T(T(X,Y),A) = T\big(X, T(Y,A)\big) = T\left(X, C_{A,T}(Y)\right) = T(X,Y).$$

Yani, $T(X,Y) \in L_{C_{A,T}}$.

2.1.2. Önerme $C_{A,T}$, L sınırlı kafesi üzerinde bir t −kapanış operatörü olsun. Bu taktirde $A = \{1\}$ olması için gerek ve yeter şart L'nin tüm alt kümeleri $C_{A,T}$, t −kapanış operatörüne göre kapalı olmasıdır.

İspat: $A = \{1\}$ olsun. O zaman, herhangi bir $X \in \wp(L)$ için,

$$C_{A,T}(X) = T(X, A) = \{T(x, 1) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X.$$

Yani, X kapalıdır.

Tersine, her $X \in \wp(L)$ için $C_{A,T}(X) = X$ olsun. O zaman, özel olarak, $C_{A,T}(\{1\}) = \{1\}$ dir. Yani, $T(\{1\}, A) = A = \{1\}$. Dolayısıyla, her $a \in A$ için $T(1, a) \in \{1\}$. Sonuç olarak, $a \in \{1\}$, yani $A \subseteq \{1\}$ olduğu elde edilir. t −kapanış operatörünün tanımına göre $1 \in A$ olduğuna göre, $A = \{1\}$ elde edilir.

2.1.1. Sonuç L bir sınırlı kafes ve $C_{A,T}$, L üzerinde bir t −kapanış operatörü olsun. Bu taktirde $A = \{1\}$ ancak ve ancak $L_{C_{A,T}} = \wp(L)$.

2.1.3. Önerme Bir L sınırlı kafesi üzerinde, en zayıf t −norm olan T_W göz önüne alınsın. Bu taktirde, C_{A,T_W} t −kapanış operatörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C_{A,T_W}(X) = \begin{cases} X \cup \{0\} & 1 \notin X, \\ X \cup A \cup \{0\} & \{1\} \subsetneq X \\ A & \{1\} = X. \end{cases}$$

İspat:

Herhangi bir $\{1\} \subsetneq X \subseteq L$ olan $X \subseteq L$ için

$$\begin{aligned} C_{A,T_W}(X) = T_W(X, A) &= \{\, T_W(x, a) \mid x \in X, a \in A \,\} \\ &= \{\, T_W(x, 1) \mid x \in X \,\} \cup \{\, T_W(1, a) \mid a \in A \,\} \\ &\cup \{\, T_W(x', a') \mid x' \in X \backslash \{1\},\ a' \in A \backslash \{1\} \,\} \\ &= X \cup A \cup \{0\}. \end{aligned}$$

$\{1\} = X \subseteq L$ olan $X \subseteq L$ için

$$C_{A,T_W}(X) = T_W(X, A) = \{\, T_W(1, a) \mid 1 \in X, a \in A \,\} = \{a \in A\,\} = A$$

$1 \notin X \subseteq L$ olan $X \subseteq L$ için

$$\begin{aligned} C_{A,T_W}(X) = T_W(X, A) &= \{\, T_W(x, a) \mid x \in X, a \in A \,\} \\ &= \{\, T_W(x, 1) \mid x \in X \,\} \cup \{\, T_W(x', a') \mid x' \in X\backslash\{1\},\ a' \in A\backslash\{1\}\,\} \\ &= X \cup \{0\}\,. \end{aligned}$$

2.1.2. Sonuç Bir L sınırlı kafesi üzerinde C_{A,T_W}, t −kapanış operatörü göz önüne alınsın. $\{1\} \subsetneq A \subseteq L$ olması durumunda L'nin, C_{A,T_W}'ye göre kapalı alt kümelerinin kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L_{C_{A,T_W}} = \{X \in \wp(L) \mid\ 0 \in X \ \ ve \ \ (\, A \subseteq X \ veya\ 1 \notin X\,)\}$$

2.1.4. Önerme $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık ve $A = [0,1]$ olsun. Bu taktirde,

Her $x \in L$ için, $C_{A,T}(\{x\}) = \begin{cases} \{0, x\} & x \neq 1 \\ A & x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow T = T_D.$

İspat: Her $x \in L$ için $C_{A,T}(\{x\}) = \begin{cases} \{0, x\} & x \neq 1, \\ A & x = 1 \end{cases}$ olsun. Her $(x, y) \in]0,1[^2$ için $T = T_D$, yani $T(x, y) = 0$ olduğu gösterilmelidir. $(x, y) \in\ ]0,1[^2$ olsun. $x \neq 1$ olduğuna göre, $C_{A,T}(\{x\}) = T(\{x\}, A) = \{0, x\}$ olur. Yani $T(x, y) \in \{0, x\}$.

Varsayalım ki, $T(x, y) = x$ olsun. Buradan $x = T(x, y) \leq T_{min}(x, y) = min\{x, y\}$ olur. Böylece her $y \in]0,1[$ için $x = min\{x, y\}$, yani $x \leq y$ olur. Bu durumda $x = 0$ olur, ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $T(x, y) = 0$, yani $T = T_D$ elde edilir. Tersine $T = T_D$ olsun 2.1.3. Önerme ye göre $C_{A,T}(\{x\}) = \begin{cases} \{0, x\} & x \neq 1 \\ A & x = 1 \end{cases}$ elde edilir.

2.1.4. Uyarı Not edilmelidir ki, 2.1.4. Önerme'de, eğer $A \neq [0,1]$ ise, T_D, verilen eşitliği sağlayan tek t −norm değildir (bkz. 2.2.2. Örnek).

L $= ([0,1], \leq)$ birim reel aralık ve keyfi bir $x_0 \in [0,1]$ elemanı için $X = \{x_0\} \subseteq [0,1]$ tek elemanlı alt kümesi göz önüne alınsın. Eğer $A = \{1\}$ ise, o zaman 2.1.2. Önerme'den dolayı, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t −normu için, X'in $C_{A,T}$ t-kapanış operatörüne göre kapalı olduğu biliniyor.

Bu sonuçtan sonra ilginç bir soru akla gelir:
$\{1\} \subsetneq A$ olması durumunda, her $X = \{x_0\} \subseteq [0,1]$ tek elemanlı alt kümesinin kapalı olacağı şekilde bir $C_{A,T}$ t −kapanış operatörü (veya T t −normu) mevcut mu? Bu sorunun cevabı "Hayır" dır. Bunun için aşağıdaki önerme incelensin.

2.1.5. Önerme $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık, $A \subseteq L$ ve $1 \in$ A olsun. Eğer $\{1\} \subsetneq A$ ise bu taktirde her $X = \{x_0\} \subseteq [0,1]$ tek elemanlı alt kümesi kapalı olacak şekilde bir $C_{A,T}$ t −kapanış operatörü (veya T t −normu) mevcut değildir.

İspat: Varsayalım ki böyle bir t −kapanış operatörü mevcut olsun. Bu durumda her $x_0 \in [0,1]$ için $[0,1]$ üzerinde bir T t −normu vardır, öyle ki $C_{A,T}(\{x_0\}) = \{x_0\}$. O halde, $T(\{x_0\}, A) = \{x_0\}$. Yani her $a \in A$ için $T(x_0, a) = x_0$. $\{1\} \subsetneq A$ olduğundan dolayı, bir $y_0 \in A$ elemanı vardır, öyle ki $y_0 < 1$ ve $T(x_0, y_0) = x_0$. Özellikle $x_0 = \frac{y_0+1}{2} \in [0,1[$ seçilirse, şu elde edilir:

$$\frac{y_0 + 1}{2} = T\left(\frac{y_0 + 1}{2}, y_0\right) \leq y_0$$

Buradan $y_0 = 1$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak böyle bir $C_{A,T}$ t −kapanış operatörü mevcut değildir.

Aşağıdaki önerme, bir L tam kafesinin herhangi bir alt kümesinin $C_{A,T_\wedge}$ t −kapanış operatörüne göre kapalı olması için bir şart ortaya koyar.

2.1.6. Önerme $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam kafes, $A \subseteq L$ ve $X \in \wp(L)$ olsun. $\vee X \leq \wedge A$ ise, bu taktirde $X \in \wp(L)$ alt kümesi, $C_{A,T_\wedge}$ kapanış operatörüne göre kapalıdır.

İspat: $X \in \wp(L)$ öyle ki $\bigvee X \leq \bigwedge A$ olsun. Her $x \in X$ ve $a \in A$ için $\bigvee X \leq \bigwedge A$ olduğundan dolayı $x \leq a$ olur. Yani, her $x \in X$ ve $a \in A$ için $x \wedge a = x$ elde edilir. Dolayısıyla

$$C_{A,T_\wedge}(X) = T_\wedge(X, A) = \{x \wedge a \mid x \in X, a \in A\} = X.$$

Yani X kapalıdır.

2.1.5. Uyarı 2.1.6. Önerme'nin tersi genel olarak doğru olmayabilir. Aşağıdaki örnek incelensin.

2.1.3. Örnek $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık göz önüne alınsın. L üzerinde $T = T_{min}$, $a \in]0,1[$, $A = [a, 1]$ olsun. $X = \left[a, \frac{a+1}{2}\right] \in \wp(L)$ elemanı için $C_{A,T_{min}}(X) = X$, olup X kapalıdır ama $\bigvee X \nleq \bigwedge A$.

Bir sonraki önermede, $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde, hangi durumda tüm t −kapanış operatörlerinin çakıştığına dair önemli bir karakterizasyon verilecektir.

2.1.7. Önerme $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık göz önüne alınsın. $A \subseteq [0,1]$ öyle ki $1 \in A$ olsun. Bu taktirde, [0,1] üzerindeki tüm T_1, T_2 t −normları için $C_{A,T_1} = C_{A,T_2}$ olması için gerek ve yeter şart $A = \{1\}$ veya $A = \{0,1\}$ olmasıdır.

İspat: $[0,1]$ üzerindeki tüm T_1, T_2 t −normları için $C_{A,T_1} = C_{A,T_2}$ olsun. $A \neq \{1\}$ ve $A \neq \{0,1\}$ kabul edelim. O halde bir $x \in A$ elemanı mevcuttur, öyle ki $x \neq 0$ ve $x \neq 1$. $y \in]x, 1[$ reel sayısı için, $\{y\} \in \wp(L)$ dir. Tüm T_1, T_2 t −normları için $C_{A,T_1} = C_{A,T_2}$ olduğundan dolayı, özellikle $T_1 = T_{min}$ ve $T_2 = T_D$ içinde eşitlik doğru olur. Yani $C_{A,T_{min}}(\{y\}) = C_{A,T_D}(\{y\})$ elde edilir. Bu taktirde,

$$x = \min\{y, x\} \in T_{min}(\{y\}, A) = C_{A,T_{min}}(\{y\}) = C_{A,T_D}(\{y\}) = T_D(\{y\}, A).$$

Bu yüzden bir $a \in A$ elemanı mevcuttur, öyle ki $x = T_W(y, a)$. $x \neq y$, $a \neq 1$ ve $y \in]x, 1[$ olduğundan, $x = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Tersine, eğer $A = \{1\}$ ise, 2.1.2. Önerme'ye göre her $X \in \wp(L)$ için $C_{A,T_1}(X) = C_{A,T_2}(X)$ elde edilir. Eğer $A = \{0, 1\}$ ise, bu taktirde her $X \in \wp(L)$ için,

$$
\begin{aligned}
C_{A,T_1}(X) = T_1(X,A) &= \{T_1(x,a) \mid x \in X,\ a \in A\} \\
&= \{T_1(x_1,0) \mid x_1 \in X\} \cup \{T_1(x_2,1) \mid x_2 \in X\} \\
&= \{T_2(x_1,0) \mid x_1 \in X\} \cup \{T_2(x_2,1) \mid x_2 \in X\} \\
&= \{T_2(x,a) \mid x \in X,\ a \in A\} \\
&= T_2(X,A) = C_{A,T_2}(X).
\end{aligned}
$$

2.1.8. Önerme $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık ve $A = [0,1]$ olsun. Eğer $1 \in X$ ise, bu taktirde herhangi $X \in \wp(L)$ için $C_{A,T}(X) = A$ dır.

İspat: $X \in \wp(L)$ öyle ki $1 \in X$ olsun. Açık şekilde, $C_{A,T}(\{1\}) = [0,1] = A$ olur. Bu şekilde, **C2** kullanarak, $C_{A,T}(X) = A$ elde edilir.

2.2. C_{A,T_i}'den Elde Edilen Denklik Sınıfları

Yukarıda tanıtılan $t-$kapanış operatörleri, bir L sınırlı kafesi üzerindeki tüm $t-$normların sınıfında, aşağıdaki denklik bağıntısının verilmesine imkan sağlar.

2.2.1. Tanım $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $A \subseteq L$ öyle ki $1 \in A$ olsun. L üzerindeki tüm $t-$normların sınıfı üzerindeki $\sim_A$ bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T_1 \sim_A T_2 :\Leftrightarrow C_{A,T_1} = C_{A,T_2}.$$

2.2.1. Önerme 2.2.1.Tanım'da verilen $\sim_A$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

2.2.2. Tanım $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde $t-$norm olsun. T'nin, $\sim_A$ bağıntısına göre denklik sınıfı,

$$\bar{T} = \{T' \mid T' \sim_A T\}.$$

olarak tanımlanır ve $\bar{T}$ ile gösterilir.

2.2.1. Uyarı 2.1.7.Önerme'ye göre, eğer $A = \{1\}$ veya $A = \{0, 1\}$ ise, $C_{A,T_1} = C_{A,T_2}$, yani $[0, 1]$ birim reel aralık üzerinde tüm t −normlar için $\mathrm{T}_1 \sim_{\mathrm{A}} \mathrm{T}_2$ elde edilir. Sonuç olarak, $[0, 1]$ üzerindeki tüm t −normlar denktir. Böylece sadece bir sınıf elde edilir:

$$\bar{T} = \{\, T' \mid T' \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1] \ bir\ t - norm \,\}.$$

2.2.1. Teorem $L = ([0, 1], \leq)$ birim reel aralık ve $A = [0, 1]$ olsun. Bu taktirde T_{min}'un denklik sınıfları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\overline{T_{mın}} = \{\, T \mid T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1] \ bir\ sürekli\ \ t - norm \,\}.$$

İspat: $X \in \wp(L)$ ve T, $[0, 1]$ üzerinde bir sürekli t −norm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $C_{A,T}(\{x\}) = C_{A,T_{min}}(\{x\})$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Bu eşitliği göstermeden önce, herhangi bir $x \in X$ için $C_{A,T_{min}}(\{x\}) = [0, x]$ olduğunu gösterilsin. Gerçekten de, herhangi bir $x \in X$ için, $C_{A,T_{min}}(\{x\}) = T_{min}(\{x\}, A) = \{\min\{x, a\} \mid a \in A\} = [0, x]$.

Şimdi, $C_{A,T}(\{x\}) = [0, x]$ olduğu gösterilsin. $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\psi(y) = T(x, y)$ dönüşümü göz önüne alınsın. T sürekli olduğundan (ki bu T'nin tüm bileşenlerine göre sürekli olduğu anlamına gelir), ψ $[0, 1]$ üzerinde süreklidir. O zaman, herhangi bir $k \in [0, x]$ için, "Ara değer teoremi" kullanılarak, bir $y_0 \in [0, 1]$ elemanı mevcuttur öyleki, $k = \psi(y_0)$. Yani,

$$k = \psi(y_0) = T(x, y_0) \in T(\{x\}, A) = C_{A,T}(\{x\}),$$

Olur ki bu $[0, x] \subseteq C_{A,T}(\{x\})$, olduğu anlamına gelir.

Ters kapsama için, $y \in C_{A,T}(\{x\})$ olsun. O halde $a \in A = [0, 1]$ elemanı, $y = T(x, a)$ olacak şekilde mevcuttur. $T \leq T_{min}$ olduğundan, $y = T(x, a) \leq T_{min}(x, a) = min\{x, a\} \leq x$ olduğunu elde edilir. Bunun anlamı $y \in [0, x]$, yani $C_{A,T}(\{x\}) \subseteq [0, x]$ olur. Böylelikle, $C_{A,T} = C_{A,T_{min}}$ elde edilir, yani $T \sim_A T_{min}$ olur.

2.2.1. Sonuç $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık ve $A = [0,1]$ alınırsa, $C_{A,T_{min}}(X) = \bigcup_{x \in X}[0,x]$ olduğu elde edilir.

2.2.2. Sonuç $A = [0,1]$ olsun. $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde tanımlı herhangi sürekli T_1, T_2 t −normları için $T_1 \sim_A T_2$ dır.

2.2.2. Uyarı 2.2.2. Sonuç'da, eğer $A \subsetneq [0,1]$ ise, bu taktirde T_1 ve T_2 sürekli olsalar bile $T_1 \sim_A T_2$ denkliği doğru olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyiniz.

2.2.1. Örnek $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde tanımlı T_{min} ve T_p t −normları göz önüne alınsın ve $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olsun. İkisinin de sürekli olduğuna dikkat edilsin.

$X = \left\{\frac{1}{2}\right\} \in \wp([0,1])$ için aşağıdaki sonuçları karşılaştıralım.

$$C_{A,T_{min}}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = T_{min}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}, A\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \; ve$$

$$C_{A,T_P}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = T_P\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}, A\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Sonuç olarak $C_{A,T_{min}}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \neq C_{A,T_P}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, olduğundan dolayı $T_{min} \nsim_A T_P$.

Bir sonraki örnek, $A \subsetneq [0,1]$ olduğu halde $T_1 \sim_A T_2$ olabileceğine dair bir örnek olarak verilmiştir.

2.2.2. Örnek $L = ([0,1], \leq)$ birim reel aralık ve $A = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$ olsun. L üzerinde, 1.4.3. Örnekte verilen T_1, T_2 t −normları göz önüne alınsın:

Kolayca elde edilebilir ki her $x \in L$ için;

$$C_{A,T_1}(\{x\}) = C_{A,T_2}(\{x\}) = \begin{cases} \{0, x\} & x \neq 1 \\ A & x = 1 \end{cases}$$

C_{A,T_1} ve C_{A,T_2} cebirsel kapanış operatörleri olduğundan, her $X \in \wp(L)$ için $C_{A,T_1}(X) = C_{A,T_2}(X)$'dir. Böylece $T_1 \sim_A T_2$ olduğu elde edilir. Ayrıca 1.4.4 Örnekten biliniyor ki T_1 ve T_2 sürekli değildir.

2.3. Tüm $\boldsymbol{\theta_{A_i,T}}$ Denklik Bağıntılarının Kümesi Olan $\boldsymbol{Eq_T\wp(L)}$ Kısmen Sıralı Kümesi

2.3.1. Önerme $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes, T L'nin üzerinde keyfi ama sabit bir t −norm ve $C_{A_i,T}$ L üzerinde t −kapanış operatörleri olsun. Bu taktirde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\theta_{A_i,T}$, $\wp(L)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve şöyle tanımlanır:

$$\theta_{A_i,T} = \{(X, Y) \in \wp(L)^2 \mid C_{A_i,T}(X) = C_{A_i,T}(Y)\}.$$

2.3.1. Önerme' deki şekilde tanımlanan tüm denklik bağıntılarının kümesi $Eq_T\wp(L)$ ile gösterilir. Yani

$$Eq_T\wp(L) = \{\theta_{A_i,T} \mid A_i \subseteq L, 1 \in A_i \ ve \ T(A_i, A_i) \subseteq A_i\}.$$

2.3.1. Tanım $Eq_T\wp(L)$ üzerinde bir $\preccurlyeq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\theta_{A_1,T} \preccurlyeq \theta_{A_2,T} :\Leftrightarrow \theta_{A_1,T} \subseteq \theta_{A_2,T}.$$

2.3.2. Önerme $(Eq_T\wp(L), \preccurlyeq)$ bir kısmen sıralı küme ve $\theta_{\{1\},T}$ en küçük elemandır.

İspat: $Eq_T\wp(L) \subseteq \wp(L)^2$ ve $(\wp(L)^2, \subseteq)$ bir kısmen sıralı küme olduğundan, $(Eq_T\wp(L), \preccurlyeq)$ de bir kısmen sıralı kümedir.

2.1.2. Önerme kullanılarak, $\theta_{\{1\},T} = \{(X, X) \mid X \in \wp(L)\}$ elde edilir. Her $\theta_{A_i,T} \in Eq_T\wp(L)$ için, $\theta_{A_i,T}$ yansıyan olduğundan dolayı, $\theta_{\{1\},T} \subseteq \theta_{A_i,T}$, yani $\theta_{\{1\},T} \preccurlyeq \theta_{A_i,T}$ elde edilir.

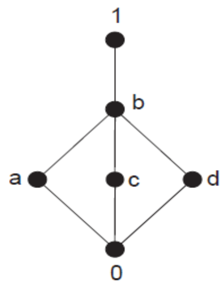
2.3.3. Önerme $\theta_{A_1,T}, \theta_{A_2,T} \in Eq_T\wp(L)$ olsun. Eğer $\theta_{A_1,T} \preccurlyeq \theta_{A_2,T}$ ise, bu taktirde $A_1 \subseteq A_2$ olur.

İspat: $\theta_{A_1,T} \preccurlyeq \theta_{A_2,T}$ olsun. $\{1\}, \mathrm{A}_1 \in \wp(\mathrm{L})$ elemanları için, $C_{A_1,T}(\{1\}) = A_1 = C_{A_1,T}(A_1)$. Yani, $(\{1\}, A_1) \in \theta_{A_1,T}$ olur. $\theta_{A_1,T} \subseteq \theta_{A_2,T}$ olduğundan dolayı, $(\{1\}, A_1) \in \theta_{A_2,T}$ elde edilir. Dolayısıyla, $A_2 = C_{A_2,T}(\{1\}) = C_{A_2,T}(A_1) = T(A_1, A_2)$. Buradan,

$A_2 = T(A_1, A_2)$ olur. $1 \in A_2$ olduğundan dolayı, her $x \in A_1$ için $x = T(x, 1) \in A_2$ olur. Böylece $A_1 \subseteq A_2$ olduğu elde edilir.

2.3.1. Uyarı $Eq_T\wp(L)$, $Eq\wp(L)$'nin bir alt kafesi (böylece tam alt kafesi) olmayabilir. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

2.3.1.Örnek Şekil 1'de verilen $\mathrm{L} = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın



Şekil 2

$A_1 = \{a, 1\}$, $A_2 = \{c, 1\}$ ve $T = T_\wedge$ olarak alınsın. Bu taktirde $\theta_{A_1,T_\wedge} \wedge \theta_{A_2,T_\wedge} = \theta_{A_1,T_\wedge} \cap \theta_{A_2,T_\wedge} \notin Eq_T\wp(L)$.

Varsayalım ki $\theta_{A_1,T_\wedge} \cap \theta_{A_2,T_\wedge} = \theta_{A^*,T_\wedge} \in Eq_T\wp(L)$.
$\{0, d\}, \{d\} \in \wp(L)$ elemanları için,

$C_{A_1,T}(\{d\}) = T_\wedge(\{d\}, A_1) = \{0, d\} = C_{A_1,T}(\{0, d\})$, yani $(\{d\}, \{0, d\}) \in \theta_{A_1,T_\wedge}$
ve
$C_{A_2,T}(\{d\}) = T_\wedge(\{d\}, A_2) = \{0, d\} = C_{A_2,T}(\{0, d\})$, yani $(\{d\}, \{0, d\}) \in \theta_{A_2,T_\wedge}$.

Böylece, $(\{d\}, \{0, d\}) \in \theta_{A_1,T_\wedge} \cap \theta_{A_2,T_\wedge} = \theta_{A^*,T_\wedge}$ elde edilir. Ama diğer yandan, $\theta_{A^*,T_\wedge} \subseteq \theta_{A_1,T_\wedge}$ *ve* $\theta_{A^*,T_\wedge} \subseteq \theta_{A_2,T_\wedge}$ olduğundan, 2.3.3. önerme'ye göre $A^* \subseteq A_1$ ve $A^* \subseteq A_2$ elde ederiz. Buradan $A^* \subseteq A_1 \cap A_2 = \{1\}$, yani $A^* = \{1\}$ elde edilir. Böylece, $(\{d\}, \{0, d\}) \in \theta_{A^*,T_\wedge} = \theta_{\{1\},T_\wedge}$ olur, ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $Eq_T\wp(L)$, $Eq\wp(L)$'nin bir alt kafesi değildir.

2.3.4. Önerme $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde t −norm olsun. $(\wp(L), \cap, \cup)$ tam kafesi göz önüne alınsın. Bu durumda, her $\theta_{A_i,T} \in Eq_T\wp(L)$ denklik bağıntısı, $(\wp(L), \cup)$ $\vee$ −yarı kafesi üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

İspat: $(X, Y) \in \theta_{A_i,T}$ olsun. Böylece $C_{A_i,T}(X) = C_{A_i,T}(Y)$, yani $T(X, A_i) = T(Y, A_i)$. Her $K \in \wp(L)$ için:

$$C_{A_i,T}(X \cup K) = T(X \cup K, A_i) = T(X, A_i) \cup T(K, A_i) = T(Y, A_i) \cup T(K, A_i)$$
$$= T(Y \cup K, A_i) = C_{A_i,T}(Y \cup K).$$

Yani, $(X \cup K, Y \cup K) \in \theta_{A_i,T}$. Böylelikle, $\theta_{A_i,T}$, $(\wp(L), \cup)$ $\vee$ −yarı kafesi üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

2.3.2. Uyarı Not edilmelidir ki, $\theta_{A_i,T} \in Eq_T\wp(L)$, $(\wp(L), \cap)$ infumum yarı kafesi üzerinde bir kongrüans bağıntısı olmayabilir. Aşağıdaki örnek incelensin.

2.3.2. Örnek 2.3.1.örnek göz önüne alınırsa, $(X, Y) = (\{d\}, \{0, d\}) \in \theta_{A_1,T_\wedge}$ olur. $K = \{0, c\} \in \wp(L)$ elemanı için, $(X \cap K, Y \cap K) = (\emptyset, \{0\}) \notin \theta_{A_1,T_\wedge}$ elde edilir. Çünkü $C_{A_1,T_\wedge}(\emptyset) = \emptyset$ ve $C_{A_1,T_\wedge}(\{0\}) = \{0\}$. Yani, $\theta_{A_1,T}$ $(\wp(L), \cap)$ infimum yarı kafesi üzerinde bir kongrüans bağıntısı değildir.

2.4. L^* Kısmen Sıralı Kümesi

2.4.1. Tanım $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $C_{A,T}$, L üzerinde bir t −kapanış operatörü olsun. $L_{C_{A,T}}$'nin bir alt kümesi olan L^* aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L^* = \{ C_{A,T}(\{x\}) \mid x \in L \} \subseteq L_{C_{A,T}}.$$

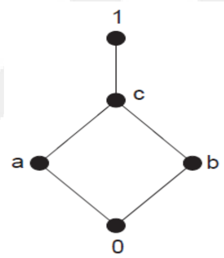
Açıkça $(L^*, \subseteq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

2.4.1. Önerme $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $C_{A,T}$ L üzerinde bir t −kapanış operatörü olsun. Bu taktirde $\alpha : L \to L^*$, $\alpha(x) = C_{A,T}(\{x\})$ $(x \in L)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir bijeksiyondur. Ek olarak, $\alpha^{-1}: L^* \to L$ bir sıra korur dönüşümdür.

İspat: Öncelikle, α'nin birebir olduğu gösterilsin. $x, y \in L$ için $\alpha(\{x\}) = \alpha(\{y\})$ olsun. Bu taktirde $C_{A,T}(\{x\}) = C_{A,T}(\{y\})$, yani $T(\{x\}, A) = T(\{y\}, A)$ olur. $x \in T(\{x\}, A) = T(\{y\}, A)$ olduğundan dolayı, bir $a \in A$ elemanı mevcuttur, öyle ki $x = T(y, a)$. Yani $x = T(y, a) \leq y$'dir ve $x \leq y$ elde edilir. $y \leq x$ benzer şekilde elde edilebilir. Bu yüzden $x = y$ elde edilir, yani α birebirdir. α açık şekilde örtendir. Böylece, α bir bijeksiyondur. Şimdi α^{-1} dönüşümünün sıra korur olduğu gösterilsin. Bunun için, $x, y \in L$ için $C_{A,T}(\{x\}) \subseteq C_{A,T}(\{y\})$ olsun. Öyleyse $x \in T(\{x\}, A) \subseteq T(\{y\}, A)$. Yani bir $a' \in A$ elemanı mevcuttur, öyle ki $x = T(y, a') \leq y$. Böylece $x \leq y$ olduğunu elde edilir.

2.4.1. Uyarı T'ye bağlı olarak, 2.4.1. Önerme 'de tanımlanan dönüşüm sıra korur olabilir de olmayabilir de. Bunu görmek için, aşağıdaki iki örnek incelensin.

2.4.1. Örnek Şekil 2'de gösterilen $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın:

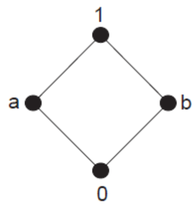


Şekil 3

$A = \{0, c, 1\}$ ve $T = T_W$ olarak alınsın. $b, c \in L$ elemanları için, $\alpha(b) = C_{A,T_W}(\{b\}) = \{0, b\}\ ve\ \alpha(c) = C_{A,T_W}(\{c\}) = \{0, c\}$ olur.

Böylece b ≤ c olup $\alpha(b) \nleq \alpha(c)$, olduğu yani α'nın sıra korur olmadığı elde edilir.

2.4.2. Örnek Şekil 3'te gösterilen $L = \{0, a, b, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın:



Şekil 4

$A = L$ ve $T = T_W$ olsun. L'nin tüm elemanlarının α altındaki görüntüleri şöyledir:

$\alpha(0) = \{0\}$

$\alpha(a) = \{0, a\}$

$\alpha(b) = \{0, b\}$

$\alpha(1) = L$

Yani $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $\alpha(x) = C_{A,T_W}(\{x\}) \subseteq C_{A,T_W}(\{y\}) = \alpha(y)$ olarak elde edilir. Bu yüzden α sıra korurdur.

2.4.2. Önerme 2.4.1.Önerme de verilen α dönüşümü göz önüne alınsın. Eğer $T = T_\wedge$ ve $A = L$ ise, bu taktirde α sıra korur dönüşümdür.

İspat: $x, y \in L$ için $x \leq y$ olsun. $\alpha(x) \leq \alpha(y)$, yani $C_{A,T_\wedge}(\{x\}) \subseteq C_{A,T_\wedge}(\{y\})$ olduğu gösterilmelidir. $k \in C_{A,T_\wedge}(\{x\}) = T_\wedge(\{x\}, A)$ olsun. Böylece bir $a \in A$ elemanı mevcuttur, öyle ki $k = T_\wedge(x, a)$. Yani, $k = x \wedge a = (x \wedge y) \wedge a = y \wedge (x \wedge a)$. $x \wedge a \in L = A$ olduğundan dolayı, $k = y \wedge (x \wedge a) \in T_\wedge(\{y\}, A) = C_{A,T_\wedge}(\{y\})$. Dolayısıyla, $\alpha(x) \leq \alpha(y)$'dir ve böylece α bir sıra korur dönüşümdür.

2.4.1. Sonuç 2.4.1. Önerme 'de, eğer $A = L$ ve $T = T_\wedge$ alınırsa bu taktirde L, $L_{C_{A,T_\wedge}}$ içine gömülebilirdir.

2.4.2. Uyarı 2.4.2. Önerme 'de, eğer $A \neq L$ ise, bu taktirde α sıra korur dönüşüm olmayabilir. Aşağıdaki örnek incelensin.

2.4.3. Örnek 2.4.1. Örnek 'de verilen $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın. $T = T_\wedge$ ve $A = \{0, a, 1\}$ olsun. $b, c \in L$ elemanları için,

$\alpha(b) = C_{A,T_\wedge}(\{b\}) = \{0, b\}$ ve $\alpha(c) = C_{A,T_\wedge}(\{c\}) = \{0, a, c\}$

Böylece, $b \leq c$ iken $\alpha(b) \nleq \alpha(c)$ olduğu yani α'nın bir sıra korur dönüşüm olmadığı elde edilir.

2.4.3. Önerme $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $C_{A,T}, L$ üzerindeki bir t −kapanış operatörü olsun. 2.4.1. Önerme 'de verilen α fonksiyonu göz önüne alınsın. Eğer 2.4.1. Önerme de verilen α dönüşümü bir sıra korur dönüşüm ise, T L üzerinde bir bölünebilir t −normdur.

İspat: α bir sıra korur dönüşüm ve $x, y \in L$ için $x \leq y$ olsun. Böylece $\alpha(x) \leq \alpha(y)$, yani $C_{A,T}(\{x\}) \subseteq C_{A,T}(\{y\})$. Yani $x \in C_{A,T}(\{y\}) = T(\{y\}, A)$ olur. Buradan, bir $a \in A$ elemanı mevcuttur, öyle ki $x = T(y, a)$. Böylece T'nin bölünebilir olduğu elde edilmiş olur.

2.4.3. Uyarı Yukarıda verilen önermenin tersinin her zaman doğru olması gerekmez. Gerçekten, 2.4.3 Örnekte verilen $\alpha(x) = C_{A,T_\wedge}(\{x\})$ dönüşümü göz önüne alınırsa, $T_\wedge$ bölünebilir bir t −norm olup, α sıra korur olmayan bir dönüşüm olarak bulunur.

2.4.2. Sonuç 2.4.3. Önerme de, $L = ([0, 1], \leq)$ birim reel aralık olduğunda, $[0, 1]$ üzerindeki herhangi bir t −normunun sürekliliğinin bölünebilirliğine denk olmasından dolayı, α'nın sıra korur olması durumunda T'nin sürekli olduğu açıktır.

2.4.4. Önerme $L = ([0, 1], \leq)$ birim reel aralık ve $A = [0, 1]$ olsun. Eğer $T : L^2 \to L$ t −normu sürekli ise bu taktirde, L, $L_{C_{A,T}}$ içine gömülebilirdir.

İspat: T sürekli olsun. $\alpha: L \to L^*$, $\alpha(x) = C_{A,T}(\{x\})$ dönüşümü göz önüne alınsın. T sürekli olduğundan, 2.2.1. Teorem ' in bir sonucu olarak , her $x \in L$ için $\alpha(x) = [0, x]$ elde edilir. 2.4.1. önerme 'den biliniyor ki α bir bijeksiyon ve α^{-1} sıra korur bir dönüşümdür. Yani, sadece α'nın sıra korur olduğunu gösterilmeli, ama zaten bu çok açıktır. Böylece, α izomorfi olup L, $L_{C_{A,T}}$ içine gömülebilirdir.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Keyfi bir sınırlı kafes üzerinde t −normların varlığı bilgisine dayanarak, kafesin bir alt kümesinin yardımıyla t −kapanış operatörleri tanıtıldı ve özelliklerinden bazıları belirlendi. $C_{A,T}$ $t -$ kapanış operatörüne göre tüm alt kümelerin kapalı oluşuna dair bir karakterizasyon verildi. Başka bir gözlem de şudur ki, birim reel aralık üzerinde, $A = [0, 1]$ olduğunda, $\sim_A$ bağıntısına göre iki sürekli t −norm denktir.

Ayrıca, bir t −kapanış operatörü tarafından belirlenen bir αdönüşümü kullanarak, eğer T sürekli ise L'nin, $L_{\mathrm{C_{A,T}}}$ ye gömülebilir olduğu gösterildi.

Elde edilen sonuçlar, sınırlı kafes üzerindeki kapanış operatörlerine yeni bir bakış açısı olarak görülebilir.

4. ÖNERİLER

Hangi koşullar altında $C_{A,V}$ (V bir nullnorm)'nin bir kapanış operatörü olduğu ve bu durumda hangi sonuçlar elde edilebileceği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Aşıcı, E., 2017. An order induced by nullnorms and its properties. Fuzzy Sets and Systems, 325, 3546.

Aşıcı, E., 2014. On the T-partial order and properties, Information Sciences. 267, 323-333.

Birkhoff, G., 1976. Lattice Theory, 3 rd edition, Providence.

Burris, S. and Sankappanavar, H.P., 1981. A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, 366.

De Baets, B. and Mesiar, R., 1999. Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104, 61-75.

De Baets, B. and Mesiar, R., 1999. Triangular norms on the real unit square, Proceedings of the 1999 EUSFLATESTYLF Joint Conference, Palma de Mallorca, Spain, 351-354.

Denecke, K. and Koppitz J., 1995. Closure Operators and Lattices, in: M-Solid Varieties of Algebras. Advances in Mathematics, vol 10. Springer, Boston, MA., 255.

Ertuğrul, U., Kesicioğlu M.N. and Karaçal F., 2016. Ordering based on uninorms, Information Sciences, 330, 315-327.

Even, V. and Gran, M., 2016. Closure operators in the category of quandles, Topology and its Applications, 200, 237-250.

Hajek, P., 1998. Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

İnce, M.A., Karaçal, F. and Mesiar, R., 2016. Medians and nullnorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 289, 74-81.

İnce, M.A. and Karaçal, F., 2019. T-clourse Operators. International Journal of General Systems, 482, 139-156.

Karaçal, F., 2005. An answer to an open problem on triangular norms Fuzzy Sets and Systems, 155, 459463.

Karaçal, F., İnce, M.A. and Mesiar, R., 2015. Nullnorms on bounded lattices Information Sciences, 325, 227-236.

Klement, E.P., 2000. Mesiar R., Pap E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 178-350.

Pang, B., Zhao, Y. and Xiu, Z., 2018. A new de_nition of order relation for the introduction of algebraic fuzzy closure operators, International Journal of Approximate Reasoning, 92, 87-96.

Schweizer, B. and Sklar, A., 1983. Probabilistic Metric Spaces, Elsevier, Amsterdam.

Slapal, J., 2017. Terse walk sets in graphs and induced closure operators Topology and its Applications, 230, 258-266.

ÖZGEÇMİŞ

Emre ALTAY, 01/01/1992 tarihinde Rize'de doğdu. İlköğretimini 2006 yılında Rize ilinde Kurtuluş İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2009 yılında Rize ilinde Rize Lisesi'nde tamamladı. 01/08/2009 tarihinde başladığı lisans eğitimini 15/06/2014 tarihinde Muğla Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2016 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir. Güneysu Osman Erkan Kız AİHL de 2016 yılı itibari ile başladığı Matematik Öğretmenliği görevini halen sürdürmektedir. Orta düzeyde İngilizce bilmektedir.