MANAS Sosyal Araştırmalar Dergisi 2023 Cilt: 12 Sayı: 4
MANAS Journal of Social Studies 2023 Volume: 12 No: 4
ISSN: 1694-7215

Research Paper / Araştırma Makalesi

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Üslü İfadelerle İlgili Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi

Ceyda DÜZGÜN[1] ve Ali Sabri İPEK[2]

Öz

Matematiksel düşünme, öğrencilerin fikirler arasındaki ilişkileri görebilme becerilerini geliştiren dinamik bir süreçtir. Bu çalışmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin beceri temelli soruları çözme sürecindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Derinlemesine ve ayrıntılı bir şekilde incelemenin esas alınması dolayısıyla nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Soruların çözümünde öğrencilerin belirli bir matematiksel temele sahip olması gerektiğinden amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme metodu ile belirlenen sekiz öğrenci, çalışma grubunu oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak 2021 Liselere Geçiş Sistemi [LGS] sınavından seçilip amaç doğrultusunda revize edilen bir üslü ifade sorusu, öğrencilerin çözümlerinden oluşan dokümanlar ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır. Matematiksel düşünme süreçleri özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme aşamalarına göre incelenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, öğrenciler özel durumlar üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma süreçlerinden ziyade genelleme sürecinde zorluklar yaşamışlardır. Bu bağlamda, özellikle varsayımda bulunma sürecinde fark ettikleri ilişkileri sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin varsayımlarını genelleme sürecinde cebirsel olarak ifade edemedikleri tespit edilmiştir. Bu sonuçlara dayalı olarak, matematik öğrenme ortamlarında matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye dönük uygulamalara daha fazla yer verilmesi önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel düşünme süreçleri, üslü ifadeler, beceri temelli sorular

Examination of Eighth Grade Students' Mathematical Thinking Processes Related to Exponential Expressions

Abstract

Mathematical thinking is a dynamic process that develops students' ability to perceive relationships between ideas. This study aims to examine the mathematical thinking processes of middle school 8th-grade students in the process of solving skill-based questions. For this purpose, we used a qualitative case study. Eight students, who were determined by the criterion sampling method, one of the purposive sampling methods, constitute the research group as the students must have a definite mathematical basis for solving the questions. As a data collection tool, we used an exponential expression question selected from the 2021 Transition to High Schools System (LGS) exam and revised for the purpose documents consisting of students' solutions, and semi-structured interviews. We examined mathematical thinking processes in the stages of specializing, conjecturing, and generalizing. According to the findings obtained students had difficulties in the generalizing process rather than the processes of specializing and conjecturing. In this context, it was determined that students who could verbally express the relationships they noticed in the process of conjecturing had difficulty in expressing the conjectures they reached in the generalizing process algebraically. Having analyzed the results we recommend more applications that can be included in mathematics learning environments to develop mathematical thinking skills.

Key Words: Processes of mathematical thinking, exponential expression, skill-based questions

Atıf İçin / Please Cite As:

Düzgün, C ve İpek A.S. (2023). Sekizinci sınıf öğrencilerinin üslü ifadelerle ilgili matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi. *Manas Sosyal Araştırmalar Dergisi, 12*(4), 1249-1269. doi:10.33206/mjss.1272950

Geliş Tarihi / Received Date: 29.03.2023 **Kabul Tarihi / Accepted Date:** 07.06.2023

[1] Öğretmen – Rize Merkez Atatürk Ortaokulu, ceyda_boysan@hotmail.com,
ORCID: 0000-0002-8415-7341
[2] Prof. Dr. – Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, ali.ipek@erdogan.edu.tr,
ORCID: 0000-0001-8712-1670

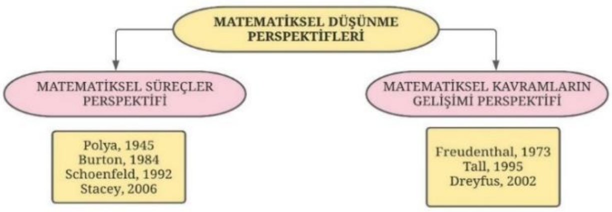
Giriş

Matematik, analitik düşünme, muhakeme etme, eleştirel düşünme ve problem çözme gibi becerilerle sıkı bir ilişkisi bulunan, dinamik bir düşünme sürecidir. Gündelik yaşamda ve bilimsel ve teknolojik alanda matematiksel bilgiye ihtiyaç her geçen gün artmakta ve bireylerin profesyonel meslek yaşamlarında matematiksel düşünme ve problem çözme becerisi daha fazla öne çıkmaktadır. Gerek ulusal öğretim programlarında (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a), gerekse uluslararası düzeyde oluşturulan matematik standartlarında (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) öne çıkarılan yetkinlikler içerisinde, günlük yaşamda karşılaşılan problemler karşısında matematiksel düşünme tarzı geliştirme ve uygulama olarak ifade edilen matematiksel yetkinlik tanımı da matematiksel düşünmeye vurgu yapmaktadır.

Matematiksel Düşünme

Matematik eğitiminde öğrencilere matematiksel düşünme becerisi kazandırmak öncelikli amaçlar arasındadır (NCTM, 1991). Benzer şekilde NCTM (2000) matematiksel düşünmeyi bağlantılar aramak olarak ifade etmekte ve bu bağlamda farklı konular arasında bağlantılar kurmanın belli bir matematiksel anlayış oluşturmanın temeli olduğunu belirtmektedir. Matematikte kavramlar arası ilişkilendirme, matematiksel kavramları derinlemesine düşünebilme, farklı fikirler üretebilme ve dolayısıyla anlamlı öğrenme için ön koşul niteliğindedir. Matematiksel kavram ve/veya fikirler arasındaki olası bağlantıları tanıma ve kullanma, matematiksel fikirlerin birbiri üzerine nasıl inşa edildiğini anlama ve matematik dışı bağlamlarda matematiği tanıyarak uygulama ortaokul düzeyindeki öğrencilerin kazanması gereken becerilerin bir kısmı olarak hem öğretim programlarında hem de NCTM standartlarında yer almaktadır.

Matematiksel düşünmenin farklı araştırmacılar ve dolayısıyla farklı bakış açılarıyla şekillenmiş birçok tanımı bulunmaktadır. Bu tanımlar incelendiğinde süreçler ve matematiksel kavramların gelişimi şeklinde iki farklı perspektifin öne çıktığı görülmektedir. Matematiksel düşünmeyi süreçler perspektifiyle ele alan görüş, matematiksel düşünmenin nasıl gerçekleştiğine odaklanarak matematiksel düşünmeyi daha geniş bir bağlamla ilişkilendirmektedir. Matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi perspektifiyle ele alan görüş ise kavramların aralarındaki ilişkilere dayalı olarak insan zihninde nasıl şekillendiğine odaklanmaktadır. Çelik'e (2016) göre alanyazında matematiksel düşünmeye yönelik öne çıkan iki farklı perspektif ve başlıca temsilcileri Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. *Matematiksel düşünme perspektifleri ve başlıca temsilcileri*

Bu araştırmada matematiksel düşünmeyi süreçler perspektifiyle ele alan Burton'un (1984) matematiksel düşünme yaklaşımı temel alınmıştır. Burton (1984) matematiksel düşünme süreçlerini özel durumlar üzerinde çalışma (specializing), varsayımda bulunma (conjecturing), genelleme (generalizing) ve ikna etme (convincing) olarak iç içe geçmiş dört aşamayla tanımlamaktadır. Özel durumlar üzerinde çalışma kişinin bir problem durumunda problemi daha iyi anlayabilmek için özel durumları inceleyerek problemi basitleştirdiği ve örüntüleri keşfetmeye çalıştığı süreç olarak ifade edilir. Bu süreç sonucunda keşfedilen örüntülerin sözel olarak ifade edilmesi ile varsayımda bulunma süreci gerçekleşmektedir. Mason, Burton ve Stacey (2010) varsayımları kelebeklere benzeterek aynı anda birden fazla varsayımın oluştuğuna, birine odaklanıldığında diğerlerinin izinin kaybedilebildiğine dikkat çekmektedirler. Ulaşılan varsayımın doğru olmadığı durumlarda yeni varsayımların oluşturulması için özel durumların tekrar incelenmesi gerekmektedir. Varsayımın doğrulandığı durumlarda ise süreç genelleme ile devam eder. Bu aşamada doğru olduğu düşünülen varsayımın cebirsel olarak ifade edilmesi söz konusudur. Son basamak olan ikna etmede ise ulaşılan genellemenin tüm durumlar için doğru olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

Liselere Geçiş Sist emi [LGS] ve Beceri Temelli Sorular

Uluslararası düzeyde uygulanan ve katılımın giderek arttığı Programme for International Student Assessment [PISA] ve Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS] gibi değerlendirmeler aracılığıyla ülkelerin eğitimdeki düzeyleri karşılaştırılmakta ve bu sınavların sonuçları da ülkelerin eğitim sistemlerine ve eğitim politikalarına yön vermektedir (Gürlen, Demirkaya ve Doğan, 2019). Matematiksel performansın oldukça önemli bir ağırlık teşkil ettiği PISA ve TIMSS değerlendirmelerinde Türkiye'nin matematik skorları bu değerlendirmelere katılan ülkelerin ortalamalarının altında bulunmaktadır (Kılcan, 2021). Bu sonuçların da etkisiyle ülkemizde 1999 yılından günümüze, ortalama dört yılda bir olmak üzere, farklı liseye geçiş sınavı uygulamalarına (LGS, OKS, SBS, TEOG, LGS) gidilmiştir (Güler, Arslan ve Çelik, 2019). Uluslararası düzeydeki bu değerlendirmelerin Türkiye'deki diğer bir etkisi ise bu sınavlarda kullanılan soru yapısındaki değişikliklerdir. 2018 yılı itibariyle uygulamaya konulan LGS yönergesinde, öğretim programlarında yer alan "kazanımlar esas alınarak öğrencinin okuduğunu anlama, yorumlama, sonuç çıkarma, problem çözme, analiz yapma, eleştirel düşünme, bilimsel süreç becerileri vb. becerilerini ölçecek nitelikte" sorular kullanılmaktadır (MEB, 2018b). Bu soru yapısına yönelik olarak ülkemizde son yıllarda yeni nesil soru veya beceri temelli soru adı altında yeni bir soru türü gündeme gelmiştir.

Miller, Linn ve Gronlund (2009) yazılı materyaller, grafik, tablo, resim, harita, şema vb. bir bağlam ve bu bağlama dayalı olarak yorum yapma, analiz etme, problem çözme veya matematiksel muhakeme yapma gibi üst düzey beceriler kullanmayı gerektiren objektif açık uçlu test maddelerini barındıran soruları yorumlama alıştırmaları olarak tanımlamaktadır. Erden'e (2020) göre PISA ve TIMSS sınavlarının da etkisiyle bu yoruma dayalı alıştırmalar, 2018 LGS sınavı itibarıyla Türk eğitim sistemine beceri temelli sorular olarak giriş yapmıştır. Kertil, Gülbağcı Dede ve Ulusoy (2021) PISA'da kullanılan soruların beceri temelli sorular için iyi birer örnek olduğunu ifade etmektedirler. Beceri temelli sorular ile öğrencilerin okuduğunu anlama yorumlama, sonuç çıkarma, analiz yapma, eleştirel düşünme gibi üst düzey becerilerinin ölçülmesi amaçlanmaktadır (MEB, 2018b). Bu soruların çözümünde matematik derslerinde edinilen bilgiler yeterli olamamakta, üst düzey becerilerin işe koşulması gerekmekte ve dolayısıyla öğrenciler bu süreçte zorluklar yaşamaktadırlar. Alanyazında öğretmenlerin bu sorulara ilişkin algılarını/görüşlerini inceleyen (Erden, 2020; Güler, Arslan ve Çelik, 2019; Kertil, Gülbağcı Dede ve Ulusoy, 2021; Ünsal ve Kaba, 2022), öğretmenlerin LGS soruları ile daha önceki sınavları karşılaştırmalarını irdeleyen (Biber, Tuna, Uysal ve Kabuklu, 2018), uzmanların beceri temelli sorulara ilişkin görüşlerini inceleyen (Gürlen, Demirkaya ve Doğan, 2019), 2018 LGS matematik sorularını yenilenmiş Bloom taksonomisine göre inceleyen (Ekinci ve Bal, 2019) ve öğrenciler için yeni nesil matematik sorularına yönelik tutum ölçeği geliştirmeye yönelik (Kılcan, 2021) çalışmalar mevcuttur. Ancak beceri temelli matematik sorularının çözümünde öğrencilerin yaşadıkları süreçlere yönelik herhangi bir araştırmaya ulaşılabilir alanyazında rastlanmamıştır. Bu bağlamda özellikle beceri temelli soruların yapısını oluşturan matematiksel düşünme süreçlerinin ortaya konması geerkmektedir.

LGS sınavlarındaki matematik soruları matematik dersi öğretim programının 8'inci sınıf kazanımlarını içermektedir. Sayılar ve işlemler öğrenme alanı içerisinde yer üslü ifadeler de 8. sınıf matematik dersinin en önemli konularından biridir. Üslü ifadeler aynı zamanda öncesi ve sonrasındaki konularla yoğun bağlantıları dolayısıyla ortaokul öğrencilerinin sayı sistemini anlamalarında tamamlayıcı bir işleve de sahiptir. Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2019) de ortaokul öğrencilerinin doğal sayıların tamsayılara ve kesirlerin rasyonel sayılara genişletilmesi dahil olmak üzere sayı sistemini daha bütüncül olarak anlamaları gereğini ifade etmektedir. Dolayısıyla bu çalışmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin üslü ifadeler konusu özelinde beceri temelli sorulardaki matematiksel düşünme süreçleri ortaya konulmaya çalışılacaktır. Ortaokul düzeyinde yapılan çalışmalarda öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri ispat etme/doğrulama noktasında sorun yaşadıkları genel olarak ulaşılan bir bulgu olduğu için (Keskin, Akbaba Dağ ve Altun, 2013; Aygün, 2019; Tosun, 2019; Yiğit, 2019; Aygün, Orbay ve Aydın Güç, 2021) bu araştırmaya matematiksel düşünme süreçlerinin ikna etme/ispat boyutu dâhil edilmemiştir. Bu doğrultuda çalışma kapsamında aşağıdaki alt problemler incelenmiştir:

i. Öğrencilerin üslü ifadeler konusunda özel durumlar üzerinde çalışma süreçleri nasıldır?
ii. Öğrencilerin üslü ifadeler konusunda varsayımda bulunma süreçleri nasıldır?
iii. Öğrencilerin üslü ifadeler konusunda genelleme süreçleri nasıldır?

Yöntem

Bu çalışmada öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığından nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmış ve Merriam'ın (2018) durum çalışması tasarımı temel alınmıştır. Yin (2002) durum çalışmalarında araştırma sürecinde büyük değişiklikler yapılmasına sıcak bakmamakta, bir değişiklik yapılacaksa durum çalışmasının yeniden tasarlanması gerektiğini savunmakta; Stake (1995) ise durum çalışması araştırmaları sürecinde oldukça esnek olunabileceğini, çalışmanın gidişatının önceden kestirilemeyeceğini ve bu nedenle gerekli görüldüğü takdirde değişiklikler yapılabileceğini ifade etmektedir (akt. Yazan, 2015). Merriam (2018) durum çalışmalarının tercih edilmesinin temel nedeni olarak bir olguya ilişkin başka türlü elde edilemeyecek bilgilere -durumun kavranması, keşfedilmesi, kapsamlı ve bütünsel bir şekilde betimlenmesi, analizi ve yorumlanması- erişim kolaylığını sağlaması olduğunu belirtmektedir. Öğrencilerin beceri temelli soruları çözüm sürecinin derinlemesine incelendiği bu çalışma kapsamında, bu süreçteki benzerlik ve farklılıkların tespiti için ne çok katı ne de çok esnek olunmaması için Merriam (2018) deseninin kullanılması uygun görülmüştür.

Katılımcılar

Birçok nitel araştırma yönteminde olduğu gibi durum çalışmasında da katılımcı sayısı nispeten düşüktür. Bu araştırmanın katılımcıları da araştırmacının görev yaptığı devlet okulunun 8. sınıfında öğrenim gören sekiz öğrenciden oluşmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme metodu kullanılmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2018) ölçüt örneklemenin önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan olası tüm durumlar üzerinde çalışılmasına imkân sağlayan bir metod olduğuna vurgu yapmaktadır. Öğrencilerin seçiminde ölçüt olarak araştırmacının dersleri yürüttüğü sınıfta matematik dersi not ortalaması 85 ve üzerinde olma, düşüncelerini ifade edebilme, koronavirüs salgını sürecinde uzaktan yürütülen derslere düzenli olan katılım gösterme ve çalışmaya katılmaya gönüllü olma olarak belirlenmiştir. Belirlenen bu öğrencilere ait demografik bilgiler ve 4., 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerindeki not ortalamaları Tablo 1'de yer almaktadır.

Tablo 1. Katılımcıların demografik bilgileri ve akademik başarı ortalamaları

Cinsiyet						
Kız	**Erkek**	***Yaş***	***4. Sınıf Not Ortalaması***	***5. Sınıf Not Ortalaması***	***6. Sınıf Not Ortalaması***	***7. Sınıf Not Ortalaması***
5	3	13-14	86,92-97,04	90,16-97,73	87,42-96,85	94,52-100

Araştırmanın katılımcılarının ortaokul ders dönemi tüm dünyayı etkisi altına alan koronavirüs salgın sürecine denk gelmiştir. Yaz tatilinin öğrencilerin matematik bilgilerinde öğrenme kayıpları oluşturduğunu (Arı, 2004); matematikte yaşanan öğrenme kayıplarının cinsiyet, sosyoekonomik düzey, etnik köken ya da öğrencilerin evlerindeki kaynaklar fark etmeksizin tüm öğrencilerde neredeyse eşit olduğunu (Cooper, 2003) ve koronavirüs salgını sonrasında yaşanan eğitimdeki uzun süreli kesintilerin ve bizzat uzaktan eğitim uygulamalarının öğrencilerde oluşabilecek öğrenme kayıplarını artıracağını (Baz, 2021) belirten farklı araştırmalar mevcuttur.

Veri Toplama Araçları

LGS matematik soruları arasından seçilip araştırmacı tarafından revize edilen beceri temelli soru, katılımcılarla bu sorunun çözüm sürecindeki görüşmeler, bu sürece dair gözlemler ve katılımcıların yazılı ifadelerinden oluşan dokümanların incelemesi bu araştırmanın veri toplama araçlarını oluşturmaktadır. Kullanılan beceri temelli soru doğal sayı, tamsayı, rasyonel sayı, tamkare sayı, üslü ifade kavramlarını ve tüm bu sayılarla işlem becerisi gerektiren, dolayısıyla sayı sistemini bütüncül olarak kavramayı gerektiren detaylı bir içeriğe sahiptir. Ayrıca sorunun çözüm süreci yarı yapılandırılmış görüşmeyle gerçekleştirilmiş, gerekli yerlerde ilave sorularla öğrencilerin düşünceleri irdelenmiş ve böylece derinlemesine bilgi toplanması amaçlanmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2018) nitel araştırmalarda birden fazla veri toplama aracının kullanılmasının araştırmanın geçerlik ve güvenirliğinin artırılması için önemli olduğunu ifade etmektedir. Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarına ilişkin bilgiler aşağıda sırasıyla yer almaktadır.

Beceri Temelli Üslü İfade Sorusu ve Görüşme Soruları

Beceri temelli üslü ifade sorusu öğrencilerin matematiksel düşünme sürecinin tüm aşamalarını içerecek şekilde yapılandırılmıştır. Bu doğrultuda matematiksel düşünme süreçlerinin ortaya konulabilmesi amacıyla yönergeler ilave edilmiştir (Şekil 2).

(LGS, 2021)

$a \neq 0$ ve m, n tam sayılar olmak üzere
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ve $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dir.

Aşağıda, her bir hücresinde 2'nin birbirinden farklı tam sayı kuvvetlerinin yazılı olduğu iki sütunlu bir tablo verilmiştir. Tabloda bu üslü ifadelerden ikisi E ve F harfleriyle gösterilmiştir.

I. Sütun	II. Sütun
2^{-1}	2^{-2}
E	F
2^3	2^1

I. sütundaki üç üslü ifadenin çarpımı tam kare pozitif bir tam sayıya ve II. sütundaki üç üslü ifadenin çarpımı da tam kare pozitif bir tam sayıya eşittir.

Görüşme Soruları

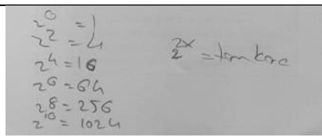
a) Sorudaki koşulu sağlayacak şekilde E ve F yerine yazılabilecek farklı sayılar bulabilir misin? Kaç farklı durum bulunabilir? Bu sayıları nasıl belirledin?
b) Yazdığın sayıları incelediğinde bu sayılar arasında herhangi bir ilişki/kural ya da ortak bir özellik fark edebildin mi?
   - Bu ilişki tüm örnek durumlar için doğru mudur?
   - Bu ilişkiyi nasıl ifade edebilirsin?
   - Bu ilişkiyi farklı şekilde ifade edebilir misin?
c) Fark ettiğin bu ilişkiyi herhangi bir sayı için nasıl ifade edersin?
   - Bu ilişkiyi, harfli ifadeleri kullanarak nasıl yazabilirsin?

Şekil 2. *Beceri Temelli Üslü ifade sorusu ve Görüşme Soruları*

Verilerin Analizi

İçerik analizi, elde edilen veriler arasında birbirine benzeyenlerin belirlenen kavram ve temalar çerçevesinde birlikte ele alınarak anlamlı bir şekilde düzenlenerek yorumlanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 242). Bu süreç aynı zamanda verilerin kodlanması ve kategorilendirmesini de içermektedir. Bu araştırmada elde edilen veriler incelendikten sonra veri setindeki örüntüler incelenip alan yazındaki araştırmalardan (Aygün, 2019; Aygün, Orbay ve Aydın-Güç, 2021; Burton, 1984; Mason, Burton ve Stacey, 2010) da yararlanılarak kategorilendirme yoluna gidilmiş, daha sonra da bu kategorilerin tanımları netleştirilip bu kategorilere uyan veriler tespit edilmiştir. Tablo 2'de bu araştırma için kullanılan kategoriler, bu kategorileri tanımlayan davranışlar ve veri setinden örneklere yer verilmiştir.

Tablo 2. *Analizde Kullanılan Kategoriler, Kategorik Davranışlar ve Kodlamaya İlişkin Veri Seti Örnekleri*

Matematiksel düşünme süreçleri	*Kategorileri tanımlayan davranışlar*	*Veri setinden örnekler*
Özel durumlar üzerinde çalışma	-Verilen durumu sağlayan farklı örnekler bulma -Bulduğu örnek durumları inceleme içerisinde olma	A: E ne olabilir o zaman? Barış: 2^2, 4'e eşittir. O zaman E 1'e eşit olabilir. 1'in, 2'nin kuvvetlerindeki eşiti ise 2^0'dır. Ya da (ulaşılacak sayı) tamkare sayılardan 16 olabilir. Iıı, 2^2 eşittir 4, 16 için 4'le çarpılması gerek. 4'ün 2'nin kuvvetlerindeki eşiti 2^2'dir. Yani E, 2^2 olabilir.
Varsayımda bulunma	-Örnek durumlar içerisindeki ilişkiyi anlama, hissetme, sezme -Örnek durumlar içerisindeki ilişkiye yönelik tahminde bulunma -Hissettiği/sezdiği ilişkiye yönelik kontrollerde bulunma -Sezilen ilişkinin kontrolüyle hata fark edip başa dönme -Fark ettiği ilişkiyi sözel veya cebirsel olarak ifade etme	(Ulaştığı tamkare değerlerin 4'le çarpılarak ilerlediğini fark ettikten sonra) Murat: Hep 4'le çarpacağım. 64 kere 4, 256 mı yapar, evet. A: Bir sonraki? Murat: 256 çarpı 4, 1024. 1024 çarpı 4... A: Ulaştığın tamkare sayılarla ilgili bir kural gördün, bu kuralı bana ifade eder misin? Murat: Ne ilişkisi gördüm. Üsleri bunun (F) tek olacak, bunun E çift olacak. Bunlar da hep 4'ün katı (tamkare sayılar). 2'nin katı.
Genelleme	-Ulaştığı varsayımı genel ifade olarak yazma	 **Şekil 3.** Melek'in tamkare sayılarla ilgili ifadesi Melek: … İki üzeri x. Iıı. Tamkare olur ama eğer x çift sayıysa. ("2^x=tamkare" yazıyor.) A: X'in yerine çift sayı olması için ne diyebilirsin mesela? Melek: (Öğrenci düşünüyor ve ikinin üssü olarak yazdığı x'in yanına 2 yazıyor.

Nitel araştırmalarda geçerlik araştırmacının araştırılan olguyu, olduğu gibi ve tarafsız olarak gözlemesi ve aktarması anlamına gelmektedir. Doğrudan bir ölçme durumu söz konusu değildir ve bu nedenle Yıldırım ve Şimşek'e (2018) göre iç geçerlik kavramı inandırıcılık ve dış geçerlik kavramı da aktarılabilirlik olarak ele alınmaktadır. Verilerin ayrıntılı betimlemesi ile okuyucu araştırma ortamını gözünde canlandırabilir ve kendi ortamına daha kolay transfer edebilir. Bu araştırmada araştırmacının derslerini yürüttüğü ve araştırma öncesinden itibaren iletişimde olduğu öğrencileriyle araştırma sürecini yürüttüğü için uzun süreli gözlem ve görüşmeler mevcuttur. Bu durum daha nitelikli bilgi edinilmesini sağlayarak inandırıcılığı artırmaktadır. Farklı veri toplama yöntemlerinin kullanılması da bir yöntemden elde edilen verinin diğer yöntemle teyit edilmesini sağlamaktadır. Nitel araştırmalarda iç güvenirlik tutarlılık, dış güvenirlik ise teyit edilebilirlik olarak ifade edilir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada verilere bağlı bulgular doğrudan alıntılarla birlikte sunulmuştur. Araştırmacı gözlem verilerini görüşmelerle birlikte sunarak pekiştirme ve teyit etme işlemlerini gerçekleştirmiştir.

Bulgular

Öğrencilerin Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Süreçleri

Öğrencilerin öncelikle kendilerine yöneltilen problemini anlamaları sorgulanmıştır. Murat ve Sevda tam olarak anlamadan çözüme geçtikleri için soruyu yeniden okumak zorunda kalmışlardır. Hande ve Nehir ise soruyu tamamen okumadan çözüm sürecine geçmişlerdir. Aşağıda bazı öğrencilerin soruyu anlama sürecindeki sözel ifadelerinden örneklere yer verilmiştir:

A: Ne anladığını açıklar mısın?

Barış: Yani E'ye [ve F'ye] öyle bir sayı seçmeliyim ki bunların (Sütunu gösteriyor.) çarpımı pozitif tamkare bir tamsayı olacak.

A: E ne olabilir o zaman?

Barış: 2^2, 4'e eşittir. O zaman E 1'e eşit olabilir. 1'in, 2'nin kuvvetlerindeki eşiti ise 2^0'dır. Ya da (ulaşılacak sayı) tamkare sayılardan 16 olabilir. Iı, 2^2 eşittir 4, 16 için 4'le çarpılması gerek. 4'ün 2'nin kuvvetlerindeki eşiti 2^2'dir. Yani E, 2^2 olabilir.

A: Sorudan ne anladığını belirtebilir misin?

Murat: Ne anladım, bunların eee, tamkaresi pozitif bir tamsayı.

A: Nasıl yani?

Murat: Bunların hepsi. Hepsinin (E'nin bulunduğu sütunu gösteriyor) çarpımı. Bunların hepsini çarptık mı? Çarptık mı?

A: Evet çarpımı diyor soruda.

Murat: (E ile ilgili bölümü okuyor.) E şeyy, pozitif bir tamkareye ulaşıyormuş. (Öğrenci F ile ilgili bölümü okuyor.) Yine aynı.

A: Tamam, yine aynı şeyi istiyor diyorsun. Peki, E ve F yerine nasıl sayılar yazılması gerekiyor?

Murat: Ee, nasıl sayılar. Tamkare bir, E ve F yazılabilecek, bulabilir misin? (Sorudaki bazı bölümleri kesintili ve sesli bir şekilde okuyor.) Eee, şey bu oluyor kaç (2^{-1}'i gösteriyor, yanına $\frac{1}{2}$ yazıyor) böyle olmuyor mu?

Verilen diyaloglarda Barış'ın soruyu dikkatli okuyup anlamış olduğu, Murat'ın ise soruyu tam okumadan çözmeye çalıştığı görülmektedir. Barış'la gerçekleşen bu diyalogun benzerleri Melek, Tuğçe ve Uğur ile de yaşanmış olup bu öğrenciler soruyu tam olarak anlamadan çözüme başlamışlardır.

Araştırmaya katılan öğrencilerin hiçbiri, araştırmacının E ya da F değerinin en az kaç yapılabileceğine yönelik sorusu öncesinde 2'nin negatif kuvvetlerinin de kullanılabileceğini düşünememişlerdir. Aşağıda bu süreci yansıtan bir diyaloga yer verilmiştir:

(Öğrenci E için birkaç uygun örnek bulduktan sonra)

A: Peki en az 2^0 mı oluyor E?

Barış: Evet, zaten 2^0, 1'e eşit, daha küçük olmaz.

A: Peki soruda E'nin kuvvetleri nasıl olmalıydı?

Barış: Tamsayı kuvvetleri veriyorduk. Eksilere inebiliriz.

A: Ne olabilir mesela eksilerden?

Barış: 2^{-2}'yi deneyebiliriz.

Barış ile gerçekleşen yukarıdaki diyalogun benzerleri diğer öğrencilerle de yaşanmıştır. Öğrencilerin negatif kuvvetli sayılarda özellikle zorluklar yaşadıkları ya da pozitif kuvvetli sayılara odaklanıp negatif kuvvetli sayıları unuttukları için E ve F yerine negatif kuvvetli sayıları düşünmedikleri görülmektedir. Bazı öğrenciler ise kuvveti negatif olan üslü ifadelerle ilgili temel bilgi eksiklikleri olduğu için negatif kuvvetlerle uğraşmak istemediklerini ifade etmiş ve sürekli pozitif kuvvetli üslü ifadeleri denemişlerdir.

Hande, Murat, Sevda ve Nehir çözüm sürecine sütunlardaki bilinen üslü ifadelerin tamsayı ya da rasyonel sayı olarak değerlerini bularak başlamışlardır. Özel durumlar bulma sürecinde bu öğrencilerin kat ve kuvvet, üslü ifade, negatif kuvvet, tamsayı ve kesir kavramlarına yönelik kavramsal eksiklikleri de ortaya çıkmıştır. Hem soruyu tam olarak anlamamaları hem de temel kavramlardaki eksiklikleri çözüm sürecinin diğer öğrencilere nazaran uzamasına da neden olmuştur. Kat ve kuvvet terimlerine yönelik Hande'nin ifadeleri aşağıda yer almaktadır:

Hande: 2'nin birbirinden farklı tamsayı kuvvetleri.

A: Yani?

Hande: E ve F yerine 2'nin katı olacak.

…

Hande: Buna 2 desek olmaz mı? (2^{-1}'i gösteriyor.)

A: Olmaz, o 2'ye eşit değil ki.

Diyalogdan Hande'nin kat ve kuvvet terimlerini aynı anlamda kullandığı anlaşılmaktadır. Ayrıca Hande'nin negatif kuvvetlere yönelik kavramsal eksikliğinin farkında olduğu ve bu nedenle negatif kuvvet içeren durumları değiştirerek soruya devam etmek istediği gözlemlenmektedir.

Negatif üsse yönelik yapılan hatalardan bir diğeri de taban ve üssün çarpılması durumudur. Bu duruma Hande, Murat ve Nehir'de rastlanmıştır. Murat kuvveti negatif olan üslü ifadelerin değerlerini başlangıçta doğru bulmasına rağmen aynı negatif kuvvetli üslü ifadeler için farklı anlarda farklı değerler belirtmiştir. Bu durum Murat'ın kavramsal bilgi eksikliklerine işaret etmektedir. Negatif kuvvetlere yönelik kavramsal bilgi eksikliği görülen öğrencilerin bu sürecine örnek olarak Nehir'in ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Tamam, şu an için E yerine farklı hangi sayıları bulabilirsin?

Nehir: Önce şunları bulsam. (Öğrenci E'nin bulunduğu sütundaki 2^{-1} ve 2^3'ü gösteriyor.) -2 oluyor bu (2^{-1}).

A: Yazar mısın, nasıl buluyorsun -2'yi?

Nehir: Önce üssü bulsam?

A: Sen bilirsin nasıl tercih ediyorsan.

Nehir: Yani sonuçta çarpımı tamkare pozitif diyor.

A: Tamam.

Nehir: Yani, 2'yle neyi çarpacağım burada? Burada (2^3) üç kere ikiyi çarpacaksam, (2^{-1}) da eksi bir kere ikiyi çarpacağım.

A: Eksi birle ikiyi mi çarpmak demek bu?

Nehir: Eksi bir kere ikiyi çarpacağım.

A: İki üzeri eksi bir neye eşit?

Nehir: Eksi 2'ye. (Bir süre sessizliğin ardından) Değil mi?

Diyaloglarda Nehir'in üslü ifade ile ilgili kavramsal eksikleri görülmektedir. Yukarıdakine benzer ifadeler Hande ve Murat ile de gerçekleşmiştir. Murat başlangıç aşamasında eksi kuvvetle ilgili hata yapmamış ancak çözüm sürecinde taban ve üssü çarparak üslü ifadenin değerini bulmaya çalışmıştır. Pozitif kuvvetli üslü ifadelerle işlemlerde herhangi sorun yaşamayan bu öğrencilerin negatif kuvvetlerde sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Hande negatif kuvvetlerde eksiklikleri olduğunun farkında olduğu için E ve F için farklı özel durumlar bulmaya çalışırken negatif kuvvetlerle işlem yapmaktan kaçınmış ve negatif kuvveti pozitif olarak değiştirmek istediğini dile getirmiştir. Araştırmacı Nehir, Hande ve Murat'a bu kavram eksiklikleri nedeniyle öncelikle bildikleri bir üslü ifadeyi buldurmuş, ardından kuvveti sistematik olarak azaltarak üslü ifade kavramını hatırlamalarını sağlamış ve öğrencilerin soruyu çözmelerini beklemiştir.

Özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde bazı öğrencilerde rasyonel sayıları hatalı okuma ve rasyonel sayılarla işlemlere yönelik sorunlara da rastlanmıştır. Aşağıda Hande, Sevda, Nehir ve Murat'ta gözlemlenen rasyonel sayılarla çarpma işlemi sırasındaki kafa karışıklığını ve Sevda ile Murat'ta gözlemlenen rasyonel sayıyı hatalı okuma süreçlerinden bir kesite yer verilmiştir:

A: 2^{-2} ne oluyor?

Murat: Dört üzeri bir oluyor (Dörtte bir demek istiyor ve $\frac{1}{4}$ yazıyor.)

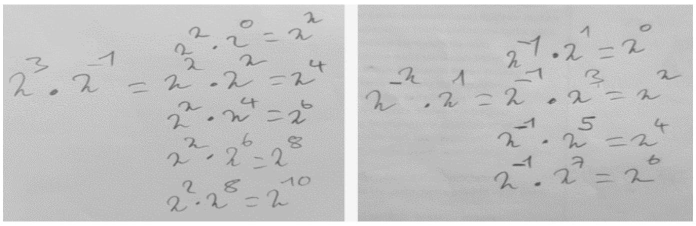
…

Murat: 2 üzeri 4 eşittir 16. 16'yla ikide biri çarpsak.

A: Neye ulaşırsın?

Murat: ($16 \cdot \frac{1}{2}$ işleminde yapılacak çarpma için) Bunun[la] [16] bunu [1] mu çarpacağız, bununla bunu [2] mu çarpacağız?

Diyalogda öğrencilerin yaşadıkları zorluklara ilişkin ifadeler görülmektedir. Yaşadıkları sorunlara rağmen öğrencilerin tamamı sorudaki koşula uygun olacak şekilde özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde birden fazla özel durum bulmuşlardır. Şekil 4'te Uğur'un özel durumlar bulma sürecindeki yazılı ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 4. *Uğur'un Özel Durumlar Sürecindeki Yazılı İfadeleri*

Sonuç olarak araştırmaya katılan tüm öğrenciler sorudaki koşula uygun olacak şekilde birden fazla özel durum oluşturabilmişlerdir. Ancak öğrencilerin tamamı özel durumlar bulma sürecinde pozitif kuvvetlere odaklanmışlardır. Araştırmacının öğrencilerin üslü ifade kavram bilgisini daha iyi algılayabilmek adına öğrencileri negatif kuvvetlere yönlendirmesi sonucunda öğrencilerin negatif kuvvetlere ilişkin kavramsal düzeydeki eksiklikleri görülebilmiştir.

Öğrencilerin varsayımda bulunma süreçleri

Araştırmaya katılan öğrencilerin tamamı verilen üslü ifade sorusundaki E ve F yerine konulabilecek birden fazla özel durum tespit edebilmişlerdir. Öğrencilerin üslü ifade sorusunu çözerken buldukları E değerleri, F değerleri ve ulaştıkları tam kare ifadeleri inceleyerek ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların gelişimi süreci bu kısımda yer almaktadır.

Çözümde üslü ifadelerle çarpma işlemi özelliklerini kullanan Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur'un varsayımda bulunma süreci diğer öğrencilere göre daha kısa sürmüştür. Barış ve Tuğçe elde ettikleri E değerlerinden hareketle E'nin 2^2 ile çarpıldığını söyleyerek sorudaki ilk varsayımlarını ifade etmişlerdir. Barış daha sonra varsayımını "*E değerlerinin kuvvetleri 2'nin katı olacak*" şeklinde güncellemiştir. Melek ise farklı E değerleri bulduktan sonra E'nin 4'le çarpılarak ilerlediğini ifade etmiştir. Barış F değerleri bulmaya çalışırken önce E için bulduğu 2'nin çift kuvveti olması gerektiğini belirten varsayımına yönelik denemeler yapmış, bu denemelerden herhangi bir sonuç elde edemeyince F değerlerinin de E gibi 2^2 ile çarpıldığını ifade etmiştir. Melek ise birkaç özel durum denemesinin ardından E değerlerinin 2'nin çift kuvveti; F değerlerinin ise 2'nin tek kuvveti olması gerektiğini ifade etmiştir. Hem Barış hem de Melek ulaştıkları tam kare değerlerle ilgili olarak 4'le çarpılarak katlandığını ifade etmişlerdir. Barış ulaştığı tam kare sayılarla ilgili bu varsayımını "Üsler 2 ile toplanıp artıyor" şeklinde daha farklı bir şekilde de ifade etmiş; Melek ise tam kare sayıların da 2'nin çift kuvveti olduğunu belirterek varsayımını güncellemiştir. Aşağıda Melek'in varsayımda bulunma sürecinden bir kesite yer verilmiştir:

A: Peki yazdığın bu sayıları incelediğinde bir ilişki kural ya da ortak bir özellik fark edebildin mi?

Melek: (Düşünüyor.) E, 4'ün katı. [4'le çarpıldığını söylemeye çalışıyor.]

A: Hangileri dördün katı?

Melek: Hepsi 1, 4, 2 de dördün katı. Hayır değil...

A: 2'de ulaşamadığını söylemiştin zaten.

Melek: Evet, 1 – 4 – 16 – 64. Dördün katı.

A: Bir sonraki için ne diyebilirsin mesela?

Melek: Iıı. 64'le 4'ü çarparsak. (İşlemi yapıyor.) 256 olur.

A: Peki tam kare midir?

Melek: Iıı. Değil. Tam kare mi? Tam kare.. Tam kare.. (Bir süre sessiz kalıyor.)

A: Peki şu anda E'ye şunu yazarsam tam kare bir sayıya ulaşabilirim diyeceğin bir ilişki gördün mü?

Melek: (Öğrenci bir süre düşünüyor.) Eee. Şey. (Yine düşünüyor) Çift bir kuvvetle çarparsak tam kare bir sayıya ulaşıyoruz.

Diyalogda Melek'in E değerinin 2'nin çift kuvveti olması gerektiğine yönelik ifadeleri görülmektedir. Ayrıca öğrencinin "4'ün kuvvetleri" için "4'ün katları" ifadesini kullandığı da dikkat çekmektedir. Sonuç olarak Melek bulduğu özel durumlardaki ilişkiyi inceleyerek sorudaki koşula uygun E değerlerinin 2'nin çift kuvvetleri olması gerektiği varsayımına ulaşmıştır. Tuğçe ise bulduğu E değerleri üzerinden ulaştığı tamkare sayıların 2'nin çift kuvveti şeklinde olacağı varsayımında bulunmuştur. Diğer öğrencilerden oldukça farklı bir yaklaşıma sahip olan Tuğçe'nin ifadeleri aşağıda yer almaktadır:

A: Mesela bana tam kare olacak bir sayı söyleyebilir misin?

Tuğçe: 2^{12} rakamını verebilirim. 2^{14} olabilir.

A: Neye dayanarak söylüyorsun?

Tuğçe: Sürekli burada 2^2 ile çarpılıyor çünkü.

A: Mesela 2^{30} tam kare midir?

Tuğçe: 2^{30} evet tam karedir.

A: Hangi sayının karesidir peki?

Tuğçe: 2^{30}. Iıı. 2^{12}'de mesela 64'ün oluyor. Böyle yazarak gitsem olur mu?

A: Neden olmasın?

Tuğçe: (Öğrenci sadece ulaştığı tam kare ifadeleri devam ettiriyor.) 2^{12}'de 64 oluyor. 2^{14}'te o zaman 128 olur. 2^{16}'da 256, 2^{18}'de 512 oluyor. 2^{20}'de 1024, 2^{22}'de 2056 oluyor.

A: Tek tek bakacak mısın?

Tuğçe: Ya aslında... Hepsi 2'nin tamsayı kuvvetleri aslında. (Gülüyor.)

A: Ben sana 2^{50}'yi sorsaydım ne yapacaktın?

Tuğçe: O kadar gidemezdim. O zaman, 2^{30}'un farklı sayılar değerinden yapabilir miyim?

A: Deneyebilirsin.

Tuğçe: 2^{30}, 4^{15}'e eşit oluyor. Başka 16'ya gidemiyorum. 7,5 oluyor o zaman. (Kuvvetleri çarpanlarına ayırarak parçalıyor.) Başkaaa. 8'e gidebilirim. 8^{10} olur.

…

A: Mesela 2^{30} neyin karesidir dediğimde?

Tuğçe: Tam olarak bilmiyorum aslında. (Bir süre sessiz kalıyor.)

A: Sen burada 2^{30}'u 4'ün 15. kuvveti olarak yazdın.

Tuğçe: Evet, 8'in ise 10. Kuvveti.

A: Peki herhangi bir sayının karesi olarak yazabilir misin?

Tuğçe: O zaman daha da fazla bölü.. İki. 2^{15}'in karesi oluyor aslında. (4^{15}'i gösterip söylüyor.)

A: Peki diğerlerinde de benzer bir durum olabilir mi? 2^{10} neyin karesidir?

Tuğçe: 2^{10}, 32'nin karesiydi. Yani 2^5'in karesi.

Buradan da anlaşılacağı gibi Tuğçe ulaştığı tam kare (2'nin çift kuvveti) değerleri "üssün üssü" özelliğini kullanarak farklı şekillerde yazabilmiş ve buradan hareketle 2'nin çift kuvveti olan herhangi bir sayının hangi sayının karesi olduğunu da çok geçmeden belirleyebilmiştir. Bu şekildeki yaklaşımın F değerlerini bulmada Tuğçe'ye pratik kazandırdığı anlaşılmaktadır. Diğer öğrenciler ise tam kare sayılar için "*2'nin çift kuvveti olduğu*" ya da "*4 ile çarpılarak gittiği*" şeklinde ifadeler kullanmış olsalar da buldukları ifadenin neyin karesi olacağına ilişkin varsayımlarını genişletememişlerdir. Bu süreçteki keşfiyle birlikte Tuğçe, herhangi bir çift kuvvetli ifadenin neyin karesi olduğuna yönelik varsayımından hareketle geçerli bir çıkarımda bulunabilmiştir.

Uğur, E için farklı özel durumlar tespit ettikten sonra bu değerlerin çift kuvvetli olması gerektiğini ifade etmiştir. Sonrasında tam kare değerleri üslü olarak da yazmış olmasına rağmen sadece tam kare sayıların 4'er 4'er katlandığını ifade etmiştir. F için özel durumlar bulmaya çalışırken öncelikle tam kare sayılarla ilgili varsayımının burada da geçerli olduğunu ifade etmiş ve ardından F değerlerinin tek kuvvetli olması gerektiğini dile getirmiştir. Aşağıda Uğur'un bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

(F için 2^5 değerini deneyip tam kare olarak 2^4 değerine ulaştıktan sonra)

A: *2 üzeri 4 tam kare midir?*

Uğur: *Evet, tam karedir. (E için yaptığı işlemlere de bir göz atıyor.)*

A: *Sanki diğer işlemlere de bir baktın gibi.*

Uğur: *Evet.*

A: *Bir ilişki mi fark ettin aralarında? Ne düşündün?*

Uğur: Evet. Ee, yine aralarında 4 kat oluyor (Tam kareleri kastediyor) ama üsler [F için] tek olması gerekiyor.

…

A: Peki tam kareler için ne dersin? 4 kat şeklinde ilerlediğini söyledin zaten, başka bir ilişki söyleyebilir misin? Ya da F yerine başka bir sayı yazabilir misin?

Uğur: (Öğrenci işlemlerine devam ediyor, $2^{-1} \cdot 2^7 = 2^6$ yazıyor.) Tam karedir.

A: Peki bir sonraki tam kare ne olur?

Uğur: 2 üzeri 8 olur.

A: Sonraki?

Uğur: 2 üzeri 10, iki iki artıyor. Üsler.

Yukarıdaki diyalogdan da görüldüğü üzere Uğur E için özel durumlar oluşturduktan sonra sezgisel olarak F için yeni özel durumlar oluşturabilmiştir. Bu süreçte gördüğü ilişkileri sözel olarak ifade etmiştir. Murat, Hande, Sevda ve Nehir üslü ifade sorusu için E ve F değerleri bulmaya çalışırken üslü ifadeleri tamsayı ya da rasyonel sayıya dönüştürdükleri için ulaştıkları tam kare sayıları da hep tamsayı olarak ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler E için özel durumlar arayışındayken 2'nin ikinci kuvvetinden başlayıp birer birer artırarak farklı kuvvetleri denemiş ve ardından E değerlerinin 2'nin çift kuvveti olduğu varsayımına ulaşmışlardır. Bu varsayımı F için değerleri bulmaya çalışırken de denemişler ve olmadığını gördükten sonra F değerlerinin ikinin tek kuvveti olduğunu ifade etmişlerdir. Murat, Hande, Sevda ve Nehir ulaştıkları tam kare sayıları incelemelerinin ardından tam kare sayılarla ilgili olarak "*Dörtle çarpılarak gidiyor*" şeklinde varsayımda bulunmuşlardır. Murat ise çözüm sürecinin sonlarında ulaştığı tam kare değerlerin ikinin kuvvetleri olduğunu fark etmiş, bu sayıları üslü olarak ifade ederek tam kare sayıların kuvvetlerinin de ikişer ikişer arttığını ifade etmiştir. Hande E ve F için farklı özel durumlar tespit ettikten sonra diğer öğrenciler gibi E'nin 2'nin çift kuvveti; F'nin de 2'nin tek kuvveti olması gerektiğini fark etmiştir. Ancak

Hande bu değerler aracılığıyla ulaştığı tam kare sayıları kullanmamış, bu sayıların kareköklerini almış ve bu değerler üzerinden tamkare sayıların karekök değerleri için "*ikiyle katlanarak gidiyor*" şeklinde varsayımda bulunmuştur. Araştırmaya katılan öğrencilerin tamamı ulaştıkları varsayımlar için bulmuş oldukları özel durumları yeterli görmüş ve tekrar deneme yapma ya da doğrulama ihtiyacı duymamışlardır. Aşağıda Murat'ın varsayımda bulunma sürecinden bir diyaloga yer verilmiştir:

(Ulaştığı tam kare değerlerin 4'le çarpılarak ilerlediğini fark ettikten sonra)

Murat: *Hep 4'le çarpacağım. 64 kere 4, 256 mı yapar, evet.*

A: *Bir sonraki?*

Murat: *256 çarpı 4, 1024. 1024 çarpı 4...*

A: *Ulaştığın tam kare sayılarla ilgili bir kural gördün, bu kuralı bana ifade eder misin?*

Murat: *Ne ilişkisi gördüm. Üsleri bunun (F) tek olacak, bunun E çift olacak. Bunlar da hep 4'ün katı (tamkare sayılar). 2'nin katı.*

A: *Katı mı?*

Murat: *Kuvveti. 2'nin kuvveti olur mu ki?*

A: *Bilmiyorum, deneyebilirsin.*

Murat: *2 üzeri 6 eşittir 64, olur.*

A: *Yani sen 64'e 2 üzeri 6 mı diyeceksin?*

Murat: *Evet. (Yazıyor.)*

A: *16 nedir?*

Murat: *Üç, sekiz. 2 üzeri 4, 2 üzeri 8 bu da, bu da 2 üzeri 10.*

A: *O zaman tam kare sayılarla ilgili bir kural mı var?*

Murat: *Ortak bir şey. 2 katı oluyor.*

A: *İki katı derken?*

Murat: *2 katı olmuyor, artı iki oluyor.*

A: *Artı iki olan nedir peki?*

Murat: *Şimdi bu 4 ya (2 üzeri 4'ün 4'ü) buna artı 2 eklersek 6 oluyor.*

A: Üsler ikişer ikişer artıyor mu diyorsun?

Murat: Evet.

A: Tüm durumlarda geçerli midir peki?

Murat: Evet.

A: Kontrol eder misin?

Murat: 1024 oluyor, denedik o kadar.

Diyalogdan da görüldüğü üzere Murat E ve F değerleri için nasıl kuvvetlerin gerektiğini fark etmiş ve tam kare değerleri farklı şekillerde ifade edebileceğini de fark ettikten sonra varsayımını değiştirebilmiştir. Bu süreç içerisinde Murat'ın kat ve kuvvet terim bilgisinde yer yer eksiklikler görülmüştür. Ulaşılan tam kare sayıların üslü ifadelere dönüştürülmesi haricinde Hande ve Sevda da Murat'a benzer bir varsayımda bulunma süreci yaşamışlardır. Ancak ulaştıkları tam kare sayıları farklı şekillerde ifade etmediklerinden tam kare sayılara ilişkin varsayımlarını "*dörder dörder katlanıyor*" ifadesinden öteye götürememişlerdir. Nehir ise E ve F'nin farklı değerleri için ulaştığı tam kare sayıların birebir eşleştiğini görememiş, bu değerleri düzenli bir şekilde de yazmadığı için bu sayılar arasındaki ilişkileri de inceleyememiştir.

Öğrencilerin üslü ifadelerle ilgili soruda buldukları özel durumları incelemelerinin ardından ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların ifade edilme sıklıkları Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. *Üslü İfade Sorusunda Öğrencilerin Ulaştıkları Varsayımlar Ve Kullanılma Sıklıkları*

Varsayımlar	f
E değerlerinin kuvvetleri 2'nin katı/çift olmalı	8
F değerleri 2'nin tek kuvveti olmalı	7
Tam kare değerleri 4 ile çarpılarak ilerliyor.	7
Tam kare değerler ikinin çift kuvveti olmalı	3
Tam kare değerlerde üsler ikişer artıyor.	3
F değerleri 4'le çarpılarak ilerliyor.	1
E değerleri 4'le çarpılarak ilerliyor.	1
Tam kare değerlerin karekökleri 2 ile çarpılarak ilerliyor.	1

Sonuç olarak tüm öğrenciler, kendilerine yöneltilen üslü ifadeler sorusunda buldukları özel durumlardan yola çıkarak varsayımlara ulaşabilmişlerdir. Ulaştıkları tamkare sayıları üslü olarak da ifade eden öğrenciler bu tam kare sayıları da inceleyerek yeni varsayımlara da ulaşabilmişlerdir.

Öğrencilerin Genelleme Süreçleri

Melek ve Tuğçe özel durumlar üzerinde çalışmaları sonrasında hem E'nin hem de F'nin bulunduğu sütunda ulaştıkları tam kare ifadelerin çift kuvvet olması gerektiğini sözel olarak belirtmiş ve doğru bir varsayımda bulunmuşlardır. Sonrasında araştırmacı tarafından öğrencilerden varsayımlarını daha genel ifade etmeleri talep edildiğinde, üslü ifade sorusu için genel ifadeye ulaşabilen bu iki öğrencinin sözel ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Ulaştığın bu tam kare pozitif sayılar için herhangi bir ortak özellik söyleyebilir misin?

Melek: Iı. Çift olması gerekiyor, tek sayılarla olmuyor.

A: Çift olması gereken ne?

Melek: Üsler.

A: Bu bahsettiğin üslerin çift olmasının tüm durumlar için geçerli olduğunu mu söylüyorsun?

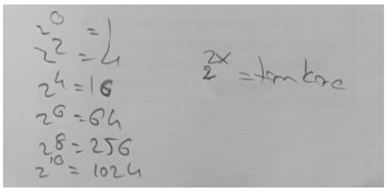
Melek: Evet.

A: Peki bu bahsettiğin özelliği daha genel bir biçimde ifade edebilir misin? Yani harfli ifadeleri kullanarak.

Melek: (Bir süre düşünüyor) Kafam karıştı. Şimdi… (Yine düşünüyor, kısa bir sessizliğin ardından) İki üzeri x. Iı. Tam kare olur ama eğer x çift sayıysa. ("2^x=tam kare" yazıyor.)

A: x'in yerine çift sayı olması için ne diyebilirsin mesela?

Melek: (Düşünüyor ve ikinin üssü olarak yazdığı x'in yanına 2 yazıyor. (Bkz. Şekil 5.)



Şekil 5. *Melek'in Tam Kare Sayılar İçin Ulaştığı Genel İfade*

A: *Şu anda oldu mu?*

Melek: *Evet.*

Melek varsayımını kısa bir düşünme sonrasında genel ifadeye dönüştürebilmiştir. Genel ifadesi Şekil 5'te görülmekte olan Melek'in bu süreçte çok fazla zorluk yaşamadığı sözel ifadelerinden anlaşılmaktadır. Varsayımını genel bir ifadeye dönüştürebilen diğer bir öğrenci olan Tuğçe'nin bu süreçteki ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

(Tuğçe, E'deki ilişkileri inceledikten hemen sonra)

Tuğçe: *Nasıl bir şey gördüm. Bunları birbirine dönüştürebiliyorum. (Tam kare sayılardaki 16 ve 256'yı gösteriyor) Burada da mesela 16'nın karesi oluyor bu da.*

A: *Anladım, peki genel bir ifade söyleyebilir misin?*

Tuğçe*: Genel ifade, sayılar, yani harflerle mi yapayım?*

A: *Evet, harfli ifadeyi kullanabilir misin?*

Tuğçe: *Mesela, 2^8 için x^y, 2^{16} için [$(x^y)^2$ yazıyor.). X üzeri y'nin 2. kuvvetini kullanırım.*

…

(Tuğçe, F için özel durumlar bulmasının ardından)

Tuğçe: *Evet, bu ikisinin (üslerin) toplamı tam kare bir sayıya eşit olması gerekiyor. İkinin karesine (Çift kuvveti hatalı ifade ediyor.)*

A: *Tam kare olması için nasıl olması gerekiyor kuvvetin?*

Tuğçe: *Kuvvetin çift bir sayı olması lazım.*

A: *Peki bu söylediğin ifadeyi harfli ifadelerle nasıl belirtebilirsin?*

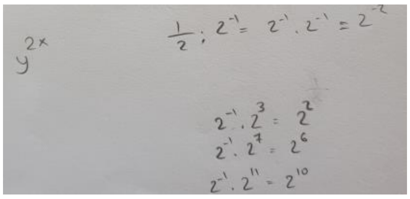
Tuğçe: *Harfli ifadeyle... (Kısa bir süre düşünüyor.) Mesela 2 yerine farklı bir şey mi koyayım?*

A: *Nasıl düşünüyorsan. Kuvvetin çift olması gerektiğini söyledin.*

Tuğçe: *Kuvvet kesinlikle çift olacak. O zaman eee, 2x diyebilirim kuvvet için (Yazarak devam ediyor.)*

A: *Kuvvete 2x diyebilirim diyorsun. Taban farklı olabilir mi?*

Tuğçe: *Olabilir, tabana y diyebilirim (*y^{2x} yazıyor. Bkz. Şekil 6.)



Şekil 6.*Tuğçe'nin Genel İfadesi*

A: Böyle bir sayı kesinlikle tam karedir diyebilir misin?

Tuğçe: Evet, her zaman geçerlidir.

Tuğçe'nin yazılı ve sözlü ifadeleri incelendiğinde, E için özel durumlar bulmasının ardından üslü olarak ifade ettiği tam kare ifadelerin kuvvetlerini çarpanlarına ayırma yolunu seçtiği görülmektedir. Ancak başlangıçtaki ifadelerinde x ve y değerlerini bilinen bir sayı için kullandığı da görülmektedir. Tuğçe'nin verilen diyaloğun son kısmında dile getirdiği ve Şekil 6'da da görülen yazılı ifadelerinde ise kullandığı x ve y sembollerini değişken olarak kullandığı açıktır. Öğrenci 2 tabanından yola çıkarak ulaştığı kuvveti çift olan sayıların tam kare olması gerektiği yönündeki varsayımını, tüm sayıların çift kuvvetlerinin tam kare olacağı şeklinde genişletebilmiştir. [Öğrenciler tüm sayılar derken tamsayıları kastetmektedirler.] Yazılı ve sözlü ifadelerinden de görüldüğü üzere Tuğçe üslü ifadeler sorusunda fazla zorluk yaşamadan genellemeye ulaşmayı başarmıştır.

Barış, Uğur ve Hande'nin üslü ifade sorusu için genellemeye ulaşma süreçlerindeki benzerlikler dikkat çekmektedir. Barış ve Uğur ulaştıkları tam kare ifadeleri hem tamsayı hem üslü ifade olarak yazmışlardır. Hande ise ulaştığı tam kare ifadeleri sadece tamsayı olarak ifade etmiştir. Barış ulaştığı tam kare ifadelerin üslü gösterimleri üzerinden ilk varsayımını "*Üsler 2 ile toplanıp gidiyor*" şeklinde ifade etse de genellemeye çalıştığı varsayımı Hande ve Uğur gibi "*hep dörder katlanıyor*" ifadesi olmuştur. Aşağıda Barış'ın varsayımlarını genellemeye dönüştürme sürecinin bir kesitine yer verilmiştir:

(F için özel durumlar bulmasından hemen sonrası)

Barış: *Kuvvetlerde 3 var, 5 var, 7 var. Bir sonrakinde 9 var. Her zaman 2 artarak gidiyor kuvvetler.*

A: *Cebirsel ifadeleri kullanarak bir şey diyebilir misin?*

Barış: *2^1'e x dersek, 2^3'e 4x, 2^5'e 16x, 2^7'ye 64x diyebilirim. Bunları diyebiliriz.*

…

(Tam kare sayılarla ilgili varsayım üzerinden görüşme devam ediyor.)

Barış: *4'le çarpılarak gidiyor.*

A: *Peki bu ilişkiyi cebirsel ifadeleri kullanarak ifade edebilir misin?*

Barış: *O zaman 1'e x desek, 4'e 4x desek, 16'ya 16x desek, 64'e de 64x…Genel bir kurala varılamadı.*

…

A: Bir sonraki sayıyı neye göre veriyorsun? (Tam kare sayılar için)

Barış: 2^{12}

A: Neden 2^{11} *vermiyorsun da* 2^{12} *veriyorsun?*

Barış: Çünkü her seferinde ikişer artıyor. Arada [kuvveti] tek sayı olmuyor.

A: Genel bir ifadeye varamıyor musun?

Barış: Hayır.

Diyalogda görüldüğü üzere Barış genel ifadeye ulaşırken değişkeni nerede kullanması gerektiğini bilememektedir. X değerini bilinen bir sayı yerine kullanmış ve farklı değerler için uygun olmadığını fark edememiştir. Bu şekilde uygun varsayımlarda bulunmuş olmakla birlikte varsayımını genel bir ifadeye dönüştürememiştir.

Uğur ve Hande de Barış gibi tam kare ifadeleri "*dörder dörder katlanıyor*" şeklinde ifade etmişlerdir. Bu varsayımın üzerinden sıradaki ulaşacakları tam kare sayıları bulsalar da genel bir ifadeye ulaşamamışlardır. Bu sürece örnek olarak Hande'nin ifadeleri aşağıda verilmiştir:

A: Tamam, hep dörtle çarpılarak gittiğini söylüyorsun, bu ilişkiyi başka türlü ifade edebilir misin?

Hande: Harfle mi?

A: Harfle de olabilir, başka türlü de olabilir. Bu sayıları incelersen belki başka bir şey görebilirsin.

Hande: Hepsi dörtle çarpılıyor. İkiyle de çarpılıyor.

A: Peki bu ilişkiyi harfleri kullanarak ifade edebilir misin?

Hande: (Sessizlik)

A: Denemek ister misin?

Hande: Dört çarpı bir şey bir şey.

A: Mesela bu örüntünün 10. adımında ne olacak?

Hande: Dokuzuncu adımı dörtle çarpacağız.

A: 15.adım için de 14. adımı mı bulacaksın?

Hande: (Kafa sallıyor.)

A: Başka bir şey görebiliyor musun?

Hande: Iıı (Hayır.)

A: Harfli ifade de kullanamıyorsun.

Hande: Evet.

Hande'nin fark ettiği ilişkiyi genel ifadeye dönüştürürken "*dört çarpı bir şey bir şey*" ifadesini kullanmaktadır. Ancak öğrenci bu durumu herhangi bir yazılı ifadeye dönüştürememiştir. Uğur da benzer bir ifadeyle Hande'den farklı olarak "*a.4*" olarak belirtmiştir. "*a yerine 3 yazarsan uygun olur mu?*" sorusu kendisine yöneltildiğinde ise uygun olmadığını ifade etmiştir. Uğur'un bu ifadesinden başka genel ifade yazma girişimi olmamıştır. Hande ve Uğur üslü ifade sorusu için varsayımlarını genel bir ifadeye dönüştürememişlerdir.

Murat ulaştığı tam kare ifadelerle ilgili varsayımını daha önce bulduğu tam kare sayıyı "*Hep dörtle çarpacağım*" şeklinde ifade etmiştir. Buradan hareketle varsayımına ilişkin birkaç deneme sonrasında yazdığı tam kare ifadeleri ikinin kuvvetleri şeklinde yazabileceğini fark edip varsayımını "*Tam kare sayıların kuvvetleri ikinin katı olmalı*" şeklinde güncellemiştir. Ancak Murat'ın harfli ifadeleri kullanarak varsayımını genel ifadeye dönüştürmeye yönelik herhangi bir yazılı girişimi olmamıştır. Murat'ın tam kare sayılarla ilgili ifadelerine, varsayımda bulunma sürecine ilişkin bulgular bölümünde yer verilmişti. Bu sürecin devamındaki ifadeleri ise aşağıdaki gibidir:

A: Ulaştığın tam kare sayılar için dörder dörder katlanıyor dedin. Sonra 2'nin kuvvetlerine gittin.2'nin kuvvetleri ikişer ikişer artıyor dedin.

Murat: Belki 3'le de olur.

A: Neden denemiyorsun?

Murat: 3 kere 2, 9 (3^2 yazıyor, hatalı okuyor.) 3 kere 3 [3^3], 27 yapmıyor mu?

A: Tam kare mi?

Murat: Hayır, bunlar olmuyor. (Düşünüyor bir süre) 3 üzeri 4, 81. 81 oluyor mu, evet.

A: Ne gördün?

Murat: x üzeri çift olacak.

A: Hımm..

Murat: Çift mi olacak. Evet.

A: Deneyebilirsin.

(Farklı tabanlarla birkaç deneme yapıyor. Tabanı 4 yaptığında ulaştığı her sayının tam kare olduğunu fark ettikten sonra)

Murat: 4'ü deneyelim. 4, 16. 4 kere 3 [4^3'ü bu şekilde okuyor.] 64. 64 de kare ama, 16 da. Tam kare değil mi, evet. Ama çok karışık bir düzenek bu. 64'te 4 256. (64 kere 4 demek istiyor.) 256 da tam kare.

A: 4'ün kuvvetleri hep tam kare mi gidiyor o zaman?

Murat: Evet.

A: Tamam. Ama 3'ün kuvvetleri hep tam kare gitmedi.

Murat: O tekte oluyor, tekte mi, çiftte oluyor?

A: Ama çiftte 6'da olmadı.

Murat: 6 üzeri 2, 36 ediyor.

A: 6 üzeri 3 olmadı.

Murat: 6 üzeri 4, 1296.

A: O tam kare mi?

Murat: Tam karedir illaki.

A: Ancak bu işe başlamadan önce kuvvet çift olacak demiştin.

Murat: Evet, o zaman 4 olacak, o da çift. O da olur o zaman.

A: Çift kuvvette oldu ama 4'te farklı bir durum mu var o zaman?

Murat: 4'te farklı bir durum var. 4 hepsi tam kare.

A: Burada da hepsi 4'ün kuvveti midir o zaman? (Ulaşılan sayıları gösteriyor.)

Murat: Evet.

A: Tamam, ama 3'ün kuvvetlerinin hepsi tam kare mi?

Murat: Hayır.

A: Hangileri tam kare?

Murat: 9-81. Bu da çift kuvvetler.

A: 6'nın?

Murat: 6 da çifttir.

A: Bu neyin karesidir söyleyemedin (1296 için). Genel bir ifade söyleyebilir misin?

Murat: Yok.

Diyalogdan da görüldüğü üzere Murat varsayımını farklı tamsayıların kuvvetleri için de genişletmiş, denemiş ve buradan hareketle farklı varsayımlara da ulaşmıştır. Ancak bu varsayımlarını doğrulamak için yeterli girişimde bulunmadığı gibi ulaştığı "*tam kare sayılar çift kuvvetli olmalı*" varsayımını da genel bir ifadeye dönüştürememiştir.

Sevda ve Nehir üslü ifade sorusunda yaptıkları denemelerin ardından ulaştıkları tam kare ifadelerin aynı olduğunu fark edememişlerdir. Bu durum öğrencilerin soruyu çözdükleri kâğıtta bir düzen takip etmemelerinden kaynaklı olabilir. Sevda E için denemeler yaparken ulaştığı tam kareler için "*Tam kareler birbirinin dört katı*" ifadesini dile getirmiş, ardından F için de "*Burada da aynı*" şeklinde düşüncesini belirtmiştir. Nehir ise tam kare sayılarla ilgili herhangi bir varsayımda bulunamamıştır. İki öğrenci de sadece E değerleri için "*İkinin çift kuvveti olmalı*" varsayımlarını genel ifadeye dönüştürmeyi başarmışlardır. Ancak F için genel bir ifadeye ulaşamamışlardır. Sevda tam kare sayılarla ilgili "*Dörder dörder katlanıyor*" ifadesini genel ifadeye dönüştürmek için çaba sarf etmiştir. Bu süreci yansıtan diyalog aşağıda verilmiştir:

(Tam kare sayıların birbirinin dört katı olduğunu ifade ettikten sonra)

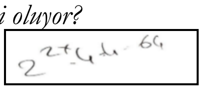
Sevda: 16 ama 16 çarpı 4'ten de 64'e ulaştım. 2 üzeri 6, 64 çarpı 4'ten 256. Bu da birbirinin, bu da dört katı. (Tam kareler)

A: Bu her durumda geçerli midir?

Sevda: 2 üzeri 8'e de bakalım. Eee. 256 çarpı 4'ten 1024 oluyor. E burada da öyle.

A: Hep 4 kat diyorsun. Peki o zaman bu ilişkiyi farklı bir şekilde ifade edebilir misin? Daha genel bir şekilde ifade edebilir misin?

Sevda: Iıı.. (Düşünüyor) İki üz... Mesela. İki üzeri 2x çarpı 4. (Bkz. Şekil 29.) Şimdi. 2 üzeri 2x çarpı 4, eee… Çarpı dört. Bir tane tam kare mi oluyor?



Şekil 7. *Sevda'nın Tam Kare Sayılarla İlgili Genelleme Sürecindeki Yazılı İfadesi*

A: Çarpı 4 derken.?

Sevda: Yani çarp.. Şimdi.. 2 üzeri 2 üzerinden gitsek. 2 üzeri 2 çarpı 4 kaç yapıyor, 16 yapıyor. 16 çarpı 4 de 64 yapıyor. Yani evet.

A: Yine 4'le çarpılarak gidiyor diyorsun.

Sevda: Evet.

A: Peki buradaki çarpı 4'ü üssün yanına mı yazdın yoksa üslü ifadenin yanına mı?

Sevda: 2 üzeri 2x, 4 ile çarpılıyor. Yani 4 çarpı. Hayır, 2 üzeri 2x, hayır, yoo, bilmiyorum. (Yazdığını siliyor.)

Sevda'nın yazılı ve sözlü ifadeleri birlikte incelendiğinde öğrencinin uygun bir genel ifadeye ulaşamadığı anlaşılmaktadır. Sevda ve Nehir sadece E için genel bir ifade belirtebilmiş ancak sorudaki asıl hedef olan tam kare sayılarla ilgili genel bir ifadeye ulaşamamışlardır.

Kısacası, öğrenciler soruyu anladıklarını belirttikten sonra sorudaki koşullara uygun olacak şekilde farklı E ve F değerleri bulmaya çalışmışlardır. Bu süreçte dört öğrenci üslü ifadeleri kullanarak, diğer öğrenciler ise üslü ifadeleri tamsayı ya da rasyonel sayıya çevirerek işlemleri yürütmüşlerdir. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler üslü ifade sorusunda E ve F yerine yazılabilecek birbirinden farklı özel durumlar oluşturmuş ve oluşturdukları bu özel durumlar içindeki ilişkileri araştırarak varsayımlarda bulunabilmişlerdir. Genellemeye ulaşma sürecinde ise öğrencilerin çoğunluğu zorluklar yaşamışlar ve genel bir ifadeye ulaşamamışlardır. Yalnızca iki öğrenci tam kare sayılarla ilgili genel bir ifadeye rahatlıkla ulaşabilmiştir. Bazı öğrenciler ulaştıkları tam kare sayılarla ilgili varsayımlarını genel ifadeye dönüştürememiş; iki öğrenci ise tam kare sayılarla ilgili doğru olan varsayımlarını genel bir ifadeye dönüştürmek için hiçbir girişimde bulunamamışlardır. Koşula uygun olacak şekildeki E değerleri için genel bir ifadeye yalnızca iki öğrenci ulaşabilmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin üslü ifadeler konusundaki matematiksel düşünmeleri özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri üzerinden ele alınmıştır. Öğrenciler özel durumlar üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma süreçlerinden ziyade genelleme sürecinde zorluklar yaşamışlardır. Varsayımda bulunma sürecinde fark ettikleri ilişkileri sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin varsayımlarını genelleme sürecinde cebirsel olarak ifade edememeleri çalışma sonucu olarak özellikle öne çıkmaktadır.

Matematiksel düşünme sürecinin giriş aşaması olarak değerlendirilebilecek özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde öğrencilerin diğer aşamalara geçişte çok fazla sıkıntı yaşamadıkları ve E ile F için birden fazla özel duruma ulaşabildikleri tespit edilmiştir. Bu sonuca benzer şekilde Tall (2008), Yıldırım (2015), Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2018) ve Kükey (2018) de öğrencilerin özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde genellikle ciddi problemler yaşamadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Önceden edindikleri işlemsel becerilerin kazanılmasını ve pekiştirilmesini amaçlayan sorulara bu sınıf düzeyinde daha fazla ağırlık verilmesinden kaynaklı olabilir (Arslan ve Yıldız, 2010; Yıldız, 2016). Bununla birlikte soruyu dikkatle okumama ve tam olarak anlamadan çözüme başlama ve bu nedenle çözüm sırasında soruya tekrar geri dönme ihtiyacı çok fazla gözlenmiştir. Özellikle sorudaki koşul sayısının fazla olmasının buna neden olmuş olabileceği düşünülmektedir. Çözüm sürecinde öğrencilerin yarısı üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanarak, diğer yarısı ise üslü ifadeleri tamsayı ya da rasyonel sayılara dönüştürerek hareket etmişlerdir. Üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanmayan öğrenciler sorunun üst kısmında yer alan üslü ifadelerle işlem özelliklerinin genel ifadelerle açıklandığı kısma da dikkat etmemişlerdir. Çözüm sürecinde üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanan öğrenciler ise soruda verilen sayılar arasındaki ilişkileri daha kolay bir şekilde fark etmiş ve çözüme daha kısa sürede ulaşabilmişlerdir. Üslü ifadeler konusundan kısa bir süre sonra yapılan görüşmelerde ortaya çıkan bu sonuç, bu konu işlenirken koronavirüs vakası nedeniyle uygulanan 14 günlük sınıf karantinasındaki uzaktan eğitim sürecinden kaynaklı olabilir. Ayrıca üslü ifadelerle ilgili kazanımlar bir alt sınıf düzeyinde de uzaktan eğitimle alınmış, MEB'in talimatıyla yüz yüze veya uzaktan herhangi bir sınav yapılmadığı için öğrencilerin bu konulardaki gelişimleri takip edilememiş ve gerekli önlemlerin alınamamış olması diğer bir neden olabilir.

Altıparmak ve Öziş (2005) bu sınıf düzeylerinde öğrencilerin varsayım oluşturabilmeleri ve varsayımlarını değerlendirebilmeleri, ulaştıkları varsayımlar için farklı akıl yürütme tekniklerini kullanabilmeleri gerektiğini belirtmektedir. Bu çalışma kapsamında da öğrenciler ulaştıkları E ve F değerlerini inceleyerek ilişkileri keşfetmiş ve varsayımda bulunma basamağını da gerçekleştirebilmişlerdir. Sorudaki E ve F değerleri 2'nin kuvveti olarak istendiği için buldukları değerleri üslü olarak ifade ettiklerinden üslerde oluşan örüntüyü fark edebilmişlerdir. "İkinin çift kuvveti", "ikinin tek kuvveti", "üsler ikişer artarak gidiyor" ya da tamsayıya çevirirken "4 ile çarpılarak gidiyor" şeklindeki ifadeler öğrencilerin ilişkileri fark ettiğini ve varsayımda bulunabildiklerini göstermektedir. Bununla birlikte bazı öğrencilerin varsayımda bulunma aşamasında tam olarak ne yapacaklarını bilememesi, daha önceden tahmin etmeye dönük problemlerle yeterince karşılaşmamalarından kaynaklanıyor olabilir.

Öğrencilerin üslü ifadelerle ilgili sorunun genelleme sürecinde zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Yıldız'ın (2016) çalışmasıyla uyumlu olan bu durum üslü ifadeler konusunun öğrencileri zorlayan bir konu olmasından kaynaklanıyor olabilir. Öğrencilerin genel ifadelere ulaşırken zorluk yaşadıkları bulgusu, matematiksel düşünme süreçleri üzerine yapılan farklı araştırmalarda da ortaya konmuştur (Akarsu Yakar ve Yılmaz, 2019; Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Rivera ve Becker, 2006; Tosun, 2019; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2018). Öğrencilerin üslü ifadeler sorusunda genelleme sürecinde yaşadıkları bu zorluğun nedeni ulaştıkları ya da fark ettikleri ilişkilerin üslü ifadelerin kuvvetlerinde olması olabilir. Yalnızca iki öğrenci sorunun ana hedefi olan tam kare ifadelerin çift kuvvetli olması gerektiği varsayımını keşfedip genel bir ifadeye ulaşabilmişken diğer öğrenciler ulaştıkları varsayımları genel ifadeye dönüştürememişlerdir. Oysa tüm öğrenciler E değerleri için de negatif kuvvetler haricinde tam kare ifadelere ulaşmış ve E değeri için "2'nin çift kuvvetidir" varsayımını ifade edebilmiştir. Buna rağmen ulaştıkları tam kare ifadelerle kullandıkları E değerleri arasındaki ilişkiyi fark edememişlerdir. Genellemeye ulaşamayan öğrencilerde ulaştığı varsayımı genel ifadeye dönüştürmeye çalışırken bilinen bir değeri değişkenle ifade etme, çözüm yapılan kâğıtta belirli bir düzen takip etmeme, buldukları sonuçlar için kişisel notlar almama ve sonuç olarak ilişkileri keşfetmekte zorluk yaşama gibi durumlar gözlenmiştir. Sorunun çözüm sürecinde tam kare ifadeye ulaşmaya çalışırken bulunan sonucun karekök içine alınıp eşitliğin devam ettirilmesi ve eşitlik işaretinin hatalı kullanımına da rastlanmıştır. Araştırmaya katılan iki öğrenci ulaştıkları varsayımları farklı tabanlara genişletmeyi düşünerek hareket etmiş ve tamsayıların çift kuvvetlerinin tam kare olmak zorunda olduğunu keşfetmişlerdir. Sorunun hedefi olan bu varsayıma ulaşan öğrencilerden üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanma becerisi yüksek olan genel ifadeye ulaşabilmiş, diğeri genel ifadeye ulaşmak için çabalamak istememiştir. Bu öğrencinin genellemeye ulaşmak için çaba göstermeme nedeni değişken kavramına yönelik sorun yaşaması olabilir.

Öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu çalışma sonucunda ortaya konması gerekli diğer durum da üslü ifadelerin negatif kuvvetleriyle ilgilidir. Öğrencilerin kendilerine sorulmadıkça E ve F için 2'nin negatif kuvvetlerini denemedikleri tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin pozitif kuvvetlere daha fazla aşina olmasından ya da öğrencilerin negatif kuvvetlerle ilgili yaşadıkları zorluklardan kaynaklı olabilir. Nitekim sorunun çözüm sürecinde özellikle üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanmayan öğrencilerin negatif kuvvetlerle ilgili olarak yaşadıkları zorluklar ve verilen negatif kuvvetleri pozitif kuvvetlerle değiştirme istekleri de bunu desteklemektedir. Üslü ifadeler konusuna yönelik alan yazında sayıların negatif kuvvetlerini belirleyememe, üslü ifadelerde dört işlem yaparken güçlükler yaşama ve taban ile üssü çarparak sonuç bulma gibi kavram yanılgıları mevcuttur (Baran Bulut, Güveli ve Güveli, 2021). Bu çalışma kapsamında da öğrencilerde bu kavram yanılgılarıyla karşılaşılmıştır. Bazı öğrencilerin üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanmadan soruyu çözmeye çalışmış olmalarının nedeni bu kavram yanılgıları kaynaklı olabilir.

Bu araştırmada sekizinci sınıf düzeyinde bir üslü ifade sorusu kullanılmıştır. Sadece bir öğrenme alanına yönelik birden fazla soru kullanılarak seçilen öğrenme alanında öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri incelenebilir. Örneğin oldukça geniş kapsamı bulunan sayılar ve işlemler öğrenme alanı, öğrencilerin oldukça fazla zorlandığı bir öğrenme alanı olarak öne çıkmaktadır. Reel sayılar kavramının da kazanıldığı sekizinci sınıf düzeyinde bu öğrenme alanına ilişkin belirlenecek sorularla öğrencilerin sayı sistemine ilişkin algıları hakkında daha derin bilgiler edinilebilir. İlgili alanyazında matematiksel düşünme süreçlerinin duyuşsal bileşenleri üzerinde yeterli araştırmanın olmadığı görülmektedir. Farklı matematik konu ve/veya kavramları üzerinde matematiksel düşünmenin duyuşsal bileşenlerine odaklanılarak öğrencilerin bu süreçlerdeki duygu ve düşünceleri araştırılabilir. Bu araştırmada öğrencilerin yarısının kesirleri obje/nesne ya da bir bütünün parçası olarak gördüğü bulgusuna ulaşılmıştır. Yedinci sınıf düzeyinde kesir kavramı rasyonel sayılara genişletilirken rasyonel sayıların sayı sistemi içerisindeki yerine gerekli vurgunun yapılması öğretmenlere önerilebilir.

Etik Beyan

"*Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Üslü İfadelerle İlgili Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi*" başlıklı çalışmanın yazım sürecinde bilimsel kurallara, etik ve alıntı kurallarına uyulmuş; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifat yapılmamış ve bu çalışma herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiştir. Gerekli olan etik kurul izinleri Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu'nun 26.10.2021 tarih ve 2021/225 sayılı kararı ile alınmıştır.

Arştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Yazarların çalışmadaki katkı oranları eşittir.

Çatışma Beyanı

Araştırmada çıkar çatışması oluşacak herhangi bir durum söz konusu değildir.

Not

Bu makale, birinci yazarın Prof. Dr. Ali Sabri İPEK danışmanlığında hazırlanan yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Kaynakça

Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz S. (2019). "Matematiğin Üç Dünyası" teorisine göre 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin procept düzeyleri. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, *10*(1), 1–13.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

Arı, A. (2004). Yaz tatili öğrenme kaybı. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(2), 243-258.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, *35*(156), 17–31.

Aygün, Y. İ. (2019). *Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve tanı konulmamış öğrencilerin farklı ortamlarda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Amasya Üniversitesi, Amasya.

Aygün, Y. İ., Orbay, K. ve Aydın Güç, F. (2021). Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve konulmamış öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin karşılaştırılması. *Milli Eğitim Dergisi*, *50*(229), 337–362.

Baran Bulut, D., Güveli, E. ve Güveli, H. (2021). Üslü ifadeler konusu ile ilgili üç aşamalı kavram testi geliştirme çalışması. *Cumhuriyet International Journal of Education*, *10*(3), 1150-1167. http://dx.doi.org/10.30703/cije.819260

Baz, B. (2021). COVID-19 salgını sürecinde öğrencilerin olası öğrenme kayıpları üzerine bir değerlendirme. *Temel Eğitim Dergisi*, *3*(1), 6–19. https://doi.org/10.52105/temelegitim.3.1.3.

Biber, A. Ç., Tuna, A., Uysal, R. ve Kabuklu, Ü. N. (2018). Liselere geçiş sınavının örnek matematik sorularına dair destekleme ve yetiştirme kursu matematik öğretmenlerinin görüşleri. *Asya Öğretim Dergisi*, *6*(2),63–80. Retrieved from: https://dergipark.org.tr/tr/pub/aji/issue/41386/428527

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal For Research İn Mathematics Education*, *15*(1), 35–49. doi:10.2307/748986

Cooper, H. (2003). Summer learning loss: The problem and some solutions. *ERIC Dıgest*. Erişim: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED475391.pdf

Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. *E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.). Matematik eğitiminde teoriler* içinde s. 17-42. Ankara: Pegem Akademi.

Ekinci, O. ve Bal, A. P. (2019). 2018 yılı liseye geçiş sınavı (LGS) matematik sorularının öğrenme alanları ve yenilenmiş Bloom taksonomisi bağlamında değerlendirilmesi. *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *7*(3), 9-18. DOI: 10.18506/anemon.462717

Erden, B. (2020). Türkçe, matematik ve fen bilimleri dersi beceri temelli sorularına ilişkin öğretmen görüşleri. *Academia Eğitim Araştırmaları Dergisi (AJER)*. *5*(2), 270-292.

Güler, M., Arslan, Z. ve Çelik, D. (2019). 2018 liselere giriş sınavına ilişkin matematik öğretmenlerinin görüşleri. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *16*(1), 337–363. Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyuefd/issue/50700/660875

Gürlen, E., Demirkaya, A. S. ve Doğan, N. (2019). Uzmanların PISA ve TIMMS sınavlarının eğitim politika ve programlarına etkisine ilişkin görüşleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (*52*), 287–319. DOI: 10.21764/maeuefd.599615

Kertil, M., Gülbağcı Dede, H. ve Ulusoy, E. G. (2021). Skill-based mathematics questions: What do middle school mathematics teachers think about and how do they implement them?. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *12*(1), 151–186. http://doi.org/10.16949/turkbilmat.774651

Keskin, M., Akbaba Dağ, S. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences*, *1*, 33-50.

Kılcan, T. (2021). Yeni nesil matematik sorularına ilişkin tutum ölçeği geliştirme: geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Anadolu Kültürel Araştırmalar Dergisi*, *5*(2), 170-180.

Kükey, E. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerinin incelenmesi* (Doktora Tezi). İnönü Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Malatya

Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (Second Edition). London: Pearson Education Limited.

MEB. (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (1,2,3,4,5,6,7,8. sınıflar)*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

MEB, (2018b). *Milli eğitim bakanlığı ortaöğretime geçiş yönergesi*. https://www.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2018_03/26191912_yonerge.pdf adresinden 13.07.2022 tarihinde erişilmiştir.

Merriam, S. B. (2018). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (Çev. Edt: S. Turan). Ankara: Nobel Akademi Yayıncılık.

Miller, M. D., Linn, R. L. ve Gronlund, N. E. (2009). *Measurementand Assessment in Teaching.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

NCTM, (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rivera, F. ve Becker, J. R. (2006). Accounting for sixth graders' generalization strategies in algebra. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, ve A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol *2*, pp.155–157). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Tall, D. (2008). *The historical and individual development of mathematical thinking: Ideas that are setbefore and met-before.* Plenary presented at Colóquio de Histório e Tecnologia no Ensino Da Mathemática, Brazil.

Tosun, N. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin açıortay konusundaki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Ünsal, S. ve Kaba, A. (2022). The characteristics of the skill based questions and their reflections on teachers and students. *Kastamonu Education Journal*, *30*(2), 273-282. doi: 10.24106/kefdergi.753717

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2019). *İlkokul ve ortaokul matematiği; Gelişimsel yaklaşımla öğretim*. S., Durmuş (Ed.), Yedinci baskıdan çeviri. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Yazan, B. (2015). Three approaches to case study methods in education: Yin, Merriam and Stake. *The Qualitative Report*, *20*(2), 134–152.

Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Yıldırım, D. ve Yavuzsoy Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *18*(1), 605-633.

Yıldız, C. (2016). Comparing the mathematical thinking experiences of students at faculty of education and faculty of arts and sciences. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology,* Special Issue for INTE, 480-488.

Yiğit, A. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

EXTENDED ABSTRACT

Mathematics is a dynamic thinking process closely related to skills like analytical thinking, reasoning, critical thinking, and problem-solving. The need for mathematical knowledge is increasing both in daily life and in scientific and technological fields, and mathematical thinking and problem-solving skills come to the fore more in the professional lives of individuals.

Providing mathematical thinking skills to students is among the primary objectives of mathematics education. NCTM (2000) expresses mathematical thinking as looking for connections and states that making connections between different subjects is the basis of forming mathematical understanding. Recognizing and using the connections between mathematical ideas, understanding how mathematical ideas are built on each other, and applying mathematics in non-mathematical contexts are included in the standards as some skills that every secondary school student should acquire. There are definitions of mathematical thinking shaped by different researchers and perspectives. When these definitions are examined, it is seen that two different perspectives come to the fore in the form of processes and the development of mathematical concepts. This research is based on Burton's (1984) mathematical thinking approach, which deals with mathematical thinking from the perspective of processes. Burton (1984) defines mathematical thinking processes as specializing, conjecturing, generalizing, and convincing as four intertwined stages.

The process of selecting and placing students in secondary education institutions in Turkey has been carried out with LGS (High Schools Transition System) as of 2018 and central exams with different names in previous years. Especially in recent years, a question structure called "skill-based question" has started to be included in the state exams in Turkey. The skill-based questions aimed at measuring students' high-level skills like reading comprehension, interpretation, deduction, analysis, and critical thinking (MEB, 2018b). In this study we investigated the following sub-problems

How are the specializing processes of students in exponential expressions?

How are the conjecturing processes of students in exponential expressions?

How are the generalizing processes of students in exponential expressions?

Since this study aims to examine students' mathematical thinking processes in-depth, we used the case study design, one of the qualitative research methods, and took the case study design of Merriam (2018) as the basis. As in many qualitative research methods, the number of participants in the case study is relatively low. The research participants consist of eight students studying in the 8th grade of the public school where the researcher works. The skill-based question selected among the LGS mathematics questions and revised by the researcher, the interviews with the participants in the solution process of this question, the observations about this process, and the examination of the documents consisting of the written statements of the participants constitute the data collection tools of this research. The root of the skill-based problem is structured in such a way as to require students to construct some cases, arrive at some intuitions and thus conjectures based on these cases, and eventually transform these conjectures into algebraic generalizations. In this direction, we added some instructions to the questions to reveal the mathematical thinking processes.

In specializing process, some students also encountered problems with incorrect reading of fractions and operations with fractions. Despite issues they experienced, all students found more than one case in the process of specializing in the condition in question. All of the students participating in the research were able to identify more than one case that could be substituted for E and F in the given exponential expression question. After examining the cases they found in the question about exponential expressions, the most common conjectures of the students were, respectively, 'The exponents of the E values must be a multiple/even of 2', 'F values must be an odd exponent of 2', and 'Perfect square values proceed by multiplying by 4'. The students tried to find different E and F values by the conditions in the question. In this process, four students used exponential expressions, and the other students performed multiplication operations by converting exponential expressions into integers or rational numbers. All the students participating in the research created different cases that could be written in place of E and F in the exponential expression question and were able to connect by investigating the relationships within these cases they created. While generalizing, most of the students (6 of them) had difficulties and could not reach a general expression.

Van de Walle, Karp, and Bay-Williams (2019) state that middle school students should understand the number system more holistically, including the extension of natural numbers to integers and fractions to rational numbers. Half of the students participating in the research started the solution without reading the question carefully without understanding enough therefore, they felt the need to return to the question during the solution. It was observed that the students were not careful enough in this question where the number of conditions was high. In the solution process, half of the students acted by using the operation features with exponential expressions, while the other half acted by converting the given exponential expressions into integers or rational numbers. Therefore, along with the difficulties specific to exponential expressions, the concept of negative exponent is one of the reasons why students have difficulties in the question of exponential expressions. Another result of this research is related to negative exponents. None of the students tried negative exponents of 2 for E and F before they were asked. It may be because students are more familiar with positive exponents or they have difficulties with negative exponents. The difficulties experienced by the students who did not use the operation features with exponential expressions in the solution process of the problem and their desire to replace the given negative exponents with positive ones also support this. All the students participating in the study (after a short repetition of the exponential expressions with those who have difficulties with negative exponents) were able to find more than one case for E and F. By examining the E and F values they reached, the students discovered the relationships and were able to perform the step of conjecturing.

In the related literature, it is seen that there is not enough research on the affective components of mathematical thinking processes. By focusing on the affective components of mathematical thinking on different mathematical topics or concepts students' feelings and thoughts in these processes can be investigated. In this study we found that half of the students thought of fractions as an object (a part of a whole or objects). While extending the concept of fractions to rational numbers at the seventh-grade level, we can suggest to teachers that the necessary emphasis should be placed on the place of rational numbers in the number system.